

---

# COURBES SUR LES VARIÉTÉS ET LEURS ESPACES DE MODULES—QUELQUES APPLICATIONS

*par*

Stéphane DRUEL

---

Les courbes sur une variété sont apparues ces trente dernières années comme un outil très efficace pour étudier les propriétés géométriques de la variété. Ce point de vue permet par exemple à Mori ([Mor79]) de montrer que toute variété lisse projective dont le fibré tangent est ample est isomorphe à un espace projectif ; Mori montre au passage dans *loc. cit.* que toute variété de Fano  $X$  est uniréglée, c'est-à-dire, que par tout point général  $x$  de  $X$  passe une courbe rationnelle.

L'un des résultats les plus jolis obtenus par ces méthodes est le fait qu'il n'y ait qu'un nombre fini de types de déformation de variétés de Fano de dimension donnée, autrement dit, qu'étant donné un entier  $n \geq 1$ , il existe une variété quasi-projective  $T$  et un morphisme propre et lisse  $U \rightarrow T$  tels que toute variété de Fano de dimension  $n$  soit isomorphe à l'une des variétés  $U_t$  pour un point  $t \in T$  convenable ([KMM92a], voir également [Cam91] et [Nad91]).

Le premier chapitre introduit d'une part les schémas  $\text{Hom}(Y, X)$  paramétrant les morphismes  $Y \rightarrow X$  où  $Y$  et  $X$  sont deux variétés sur un corps et d'autre part les espaces algébriques  $M_g(Z; d)$  paramétrant les classes d'isomorphie de courbes stables de genre  $g$  et degré  $d$  (pour une polarisation donnée) sur  $Z$  où  $Z$  est une variété lisse projective sur un corps algébriquement clos. On ne démontre pas ici l'existence de ces structures algébriques. On étudie plutôt les déformations infinitésimales des objets considérés ; on en déduit une minoration de la dimension des espaces de modules correspondants.

On donne dans le deuxième chapitre quelques applications des résultats énoncés dans le premier. On étudie pour commencer le problème du lissage de certaines courbes tracées sur une variété. On montre ensuite que les variétés de Fano sont uniréglées. Enfin, on donne la démonstration de la conjecture d'Hartshorne évoquée un peu plus haut en suivant, à peu de choses près, les arguments de Mori.

On renvoie aux textes [Bon08] et [Wit10] pour un survol des principales propriétés géométriques et arithmétiques des variétés rationnellement connexes.

Conventions.—Une variété est un schéma de type fini sur un corps. Une courbe est une variété équidimensionnelle de dimension 1. Soient  $X$  une variété et  $C \subset X$  une courbe. On dit que  $C$  est une courbe rationnelle si  $C$  est intègre et sa normalisée est isomorphe à  $\mathbf{P}^1$ . On appelle courbe rationnelle paramétrée (ou simplement courbe rationnelle) sur  $X$  tout morphisme  $\mathbf{P}^1 \rightarrow X$  génériquement injectif.

**Table des matières**

<b>Partie I. Courbes sur les variétés et leurs espaces de modules.....</b>	<b>3</b>
1. Foncteurs (pro-)représentables.....	3
2. Les morphismes de schémas et leurs espaces de modules.....	9
3. Applications stables et leurs espaces de modules.....	15
<b>Partie II. Quelques applications.....</b>	<b>20</b>
4. Lissage des arbres et peignes rationnels, d'après Kollár, Miyaoka et Mori..	20
5. Lissage des peignes, d'après Graber, Harris et Starr.....	24
6. « Bend-and-Break Lemmas ».....	26
7. Démonstration de la conjecture d'Hartshorne, d'après Mori.....	30
Références.....	34

## PARTIE I

### COURBES SUR LES VARIÉTÉS ET LEURS ESPACES DE MODULES

#### 1. Foncteurs (pro-)représentables

**1.1. Foncteur pro-représentable.** — On renvoie au très joli texte [Ser06]. On ne considère toutefois dans ce texte que des foncteurs pro-représentables (ou proches de l'être). On fixe un corps  $k$  et  $(\mathcal{O}, \mathfrak{m}_{\mathcal{O}})$  une  $k$ -algèbre locale noethérienne, complète de corps résiduel  $k$ .

On note  $(\text{Art}/\mathcal{O})$  la catégorie dont les objets sont les  $\mathcal{O}$ -algèbres  $(A, \mathfrak{m}_A)$ , locales artiniennes de corps résiduel  $k$  avec  $\mathfrak{m}_{\mathcal{O}}A \subset \mathfrak{m}_A$  et dont les morphismes sont les morphismes de  $\mathcal{O}$ -algèbres locales. On note  $(\text{Ens})$  la catégorie des ensembles.

On considère un foncteur covariant  $D : (\text{Art}/\mathcal{O}) \rightarrow (\text{Ens})$ .

**Exemple 1.1.** — Soit  $(R, \mathfrak{m}_R)$  une  $\mathcal{O}$ -algèbre locale noethérienne, complète de corps résiduel  $k$ . On note

$$h_{R/\mathcal{O}} : (\text{Art}/\mathcal{O}) \rightarrow (\text{Ens})$$

le foncteur  $\text{Hom}_{\mathcal{O}}(R, \bullet)$ .

On montre que l'application qui à un morphisme de foncteurs  $t : h_{R/\mathcal{O}} \rightarrow D$  associe l'élément  $\xi \in \varprojlim_i D(R/\mathfrak{m}_R^i)$  donné par  $\xi := t(R/\mathfrak{m}_R^i)(\pi_i) \in D(R/\mathfrak{m}_R^i)$  où  $\pi_i \in h_{R/\mathcal{O}}(R/\mathfrak{m}_R^i) = \text{Hom}_{\mathcal{O}}(R, R/\mathfrak{m}_R^i)$  est la projection canonique  $R \rightarrow R/\mathfrak{m}_R^i$  induit une bijection de l'ensemble des morphismes de foncteurs  $h_{R/\mathcal{O}} \rightarrow D$  sur l'ensemble  $\varprojlim_i D(R/\mathfrak{m}_R^i)$ .

**Définition 1.2.** — On dit que le foncteur  $D$  est pro-représentable s'il existe une  $\mathcal{O}$ -algèbre locale  $(R, \mathfrak{m}_R)$  noethérienne, complète de corps résiduel  $k$  et  $\xi \in \varprojlim_i D(R/\mathfrak{m}_R^i)$  tels que le morphisme de foncteurs  $h_{R/\mathcal{O}} \rightarrow D$  induit par  $\xi$  soit un isomorphisme; on dit alors que le couple  $(R, \xi)$  pro-représente  $D$ .

**Définition 1.3.** — On pose  $k[\varepsilon] := k[t]/(t^2)$  où  $\varepsilon = \bar{t}$ . Soit  $D : (\text{Art}/\mathcal{O}) \rightarrow (\text{Ens})$  un foncteur covariant. On appelle espace tangent du foncteur  $D$  et on note  $t_D$  l'ensemble  $D(k[\varepsilon])$ .

Cette définition est justifiée par le résultat (facile) suivant (voir le lemme 1.12).

**Lemme 1.4.** — On pose  $k[\varepsilon] := k[t]/(t^2)$  où  $\varepsilon = \bar{t}$ . Soit  $(R, \mathfrak{m}_R)$  une  $\mathcal{O}$ -algèbre locale noethérienne, complète de corps résiduel  $k$ . On a des isomorphismes de  $k$ -espaces vectoriels

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}}(R, k[\varepsilon]) \simeq (\mathfrak{m}_R/(\mathfrak{m}_{\mathcal{O}}R + \mathfrak{m}_R^2))^* \simeq \text{Dér}_{\mathcal{O}}(R, k).$$

On note aussi  $T_{R/\mathcal{O}}^1$  le  $k$ -espace vectoriel  $t_{R/\mathcal{O}}$ .

On appelle 1-extension (dans la catégorie  $(\text{Art}/\mathcal{O})$ ) un morphisme surjectif  $A' \rightarrow A$  de la catégorie  $(\text{Art}/\mathcal{O})$  de noyau  $I$  tel que  $\mathfrak{m}_{A'}I = 0$ ;  $I$  est un espace vectoriel sur  $A'/\mathfrak{m}_{A'} = k$ . Un morphisme de 1-extensions est un diagramme commutatif (dans la catégorie  $(\text{Art}/\mathcal{O})$ )

$$\begin{array}{ccc} A' & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ B' & \longrightarrow & B \end{array}$$

où  $A' \rightarrow A$  et  $B' \rightarrow B$  sont des 1-extensions.

**Définition 1.5.** — On dit que le foncteur  $D$  a une théorie des obstructions ( $k$ -linéaire complète) à valeurs dans le  $k$ -espace vectoriel de dimension finie  $U$  si pour toute 1-extension  $\varphi : A' \rightarrow A$  de noyau  $I$  et tout élément  $a \in D(A)$  il existe  $ob(\varphi, a) \in U \otimes_k I$  dépendant fonctoriellement des données  $\varphi : A' \rightarrow A$  et  $a$  tel que  $ob(\varphi, a) = 0$  si et seulement s'il existe un relèvement de  $a$  à  $A'$ , autrement dit, si et seulement si  $a$  est dans l'image de  $D(A') \rightarrow D(A)$ .

On montre facilement l'existence d'une théorie des obstructions  $k$ -linéaire complète dans le cas pro-représentable.

**Lemme 1.6** ([FM98, Lemma 5.2]). — Soit  $(R, \mathfrak{m}_R)$  une  $\mathcal{O}$ -algèbre locale noethérienne, complète de corps résiduel  $k$ .

1. On note  $T_{R/\mathcal{O}}^2$  l'espace vectoriel des 1-extensions de  $R$  par  $k$  dans la catégorie des  $\mathcal{O}$ -algèbres locales noethériennes, complètes de corps résiduel  $k$ . On choisit  $t_1, \dots, t_d \in \mathfrak{m}_R$  tels que leurs classes engendrent  $T_{R/\mathcal{O}}^1$  sur  $k$ . On a  $R \simeq Q/J$  où  $Q := \mathcal{O}[[t_1, \dots, t_d]]$  et  $J$  est un idéal convenable et toute 1-extension de  $R$  par  $k$  dans la catégorie des  $\mathcal{O}$ -algèbres locales noethériennes, complètes de corps résiduel  $k$  est déduite de l'extension  $0 \rightarrow J/\mathfrak{m}_Q J \rightarrow Q/\mathfrak{m}_Q J \rightarrow R \rightarrow 0$  par une unique image directe ; en particulier  $T_{R/\mathcal{O}}^2 \simeq (J/\mathfrak{m}_Q J)^*$ .
2. Le foncteur  $h_{R/\mathcal{O}}$  a une théorie des obstructions ( $k$ -linéaire complète) à valeurs dans l'espace vectoriel  $T_{R/\mathcal{O}}^2$ .
3. Si le foncteur  $h_{R/\mathcal{O}}$  a une théorie des obstructions ( $k$ -linéaire complète) à valeurs dans le  $k$ -espace vectoriel de dimension finie  $U$  alors il existe une application linéaire injective  $u : T_{R/\mathcal{O}}^2 \rightarrow U$  telle que pour toute 1-extension  $\varphi : A' \rightarrow A$  de noyau  $I$  et tout élément  $a \in h_{R/\mathcal{O}}(A)$ ,  $u \otimes \text{Id}_I : T_{R/\mathcal{O}}^2 \otimes_k I \rightarrow U \otimes_k I$  applique l'obstruction au relèvement de  $a$  à  $A'$  « calculée pour  $T_{R/\mathcal{O}}^2$  » sur l'obstruction au relèvement de  $a$  à  $A'$  « calculée pour  $U$  ». On a en particulier  $\dim_k(T_{R/\mathcal{O}}^2) \leq \dim_k(U)$ .

*Démonstration.* — On commence par démontrer la première assertion du lemme. On considère une 1-extension  $0 \rightarrow I \rightarrow R' \rightarrow R \rightarrow 0$  avec  $\mathfrak{m}_{Q'} I = \{0\}$  et  $I \simeq k$ . On considère ensuite un relèvement  $\lambda : Q \rightarrow R'$  de  $Q \rightarrow R$ . On a donc  $\lambda(J) \subset I$  puis  $\lambda(\mathfrak{m}_Q J) \subset \lambda(\mathfrak{m}_Q) \lambda(J) \subset \mathfrak{m}_{R'} I = \{0\}$  ;  $\lambda$  définit un morphisme de  $\mathcal{O}$ -algèbres  $Q/\mathfrak{m}_Q J \rightarrow R'$ .

Soit  $\lambda + \alpha : Q \rightarrow R'$  un morphisme de  $\mathcal{O}$ -algèbres (relevant  $Q \rightarrow R$ ) où  $\alpha : Q \rightarrow I$  est un élément de  $\text{Dér}_{\mathcal{O}}(Q, I)$  et  $I$  est un  $Q$ -module via  $\lambda$ . On a  $J \subset \mathfrak{m}_{\mathcal{O}} Q + \mathfrak{m}_Q^2$ . D'où

$$\alpha(J) \subset \alpha(\mathfrak{m}_{\mathcal{O}}) \alpha(Q) + \alpha(\mathfrak{m}_Q)^2 \subset \mathfrak{m}_{\mathcal{O}} I + \mathfrak{m}_{R'} I = \{0\}.$$

On en déduit que l'application  $k$ -linéaire  $\bar{\lambda} : Q/\mathfrak{m}_Q J \rightarrow R'$  ci-dessus ne dépend pas du choix de  $\lambda$  ; on a un morphisme d'extensions

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & J/\mathfrak{m}_Q J & \longrightarrow & Q/\mathfrak{m}_Q J & \longrightarrow & R \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \bar{\lambda} & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & R' & \longrightarrow & R \longrightarrow 0 \end{array}$$

ce qui démontre la première assertion.

On considère maintenant une 1-extension  $\varphi : A' \rightarrow A$  (dans  $(\text{Art}/\mathcal{O})$ ) de noyau  $I$  et  $a \in h_{R/\mathcal{O}}(A)$  ou encore un morphisme de  $\mathcal{O}$ -algèbres locales  $R \rightarrow A$ . On considère le produit fibré  $A' \times_A R$  et le morphisme de 1-extensions correspondant

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & A' \times_A R & \longrightarrow & R \longrightarrow 0 \\
& & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A \longrightarrow 0.
\end{array}$$

À tout élément non nul de  $I^*$ , on associe la somme  $k \sqcup_I (A' \times_A R)$  et le morphisme d'extensions

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & A' \times_A R & \longrightarrow & R \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
0 & \longrightarrow & k & \longrightarrow & k \sqcup_I (A' \times_A R) & \longrightarrow & R \longrightarrow 0.
\end{array}$$

On vérifie que l'on obtient ainsi  $ob(\varphi, a) \in \text{Hom}_k(I^*, T_{X/\mathcal{O}}^2) \simeq T_{X/\mathcal{O}}^2 \otimes_k I$  (dépendant fonctoriellement des données  $\varphi : A' \rightarrow A$  et  $a$ ) tel que  $ob(\varphi, a) = 0$  si et seulement s'il existe un relèvement de  $a$  à  $A'$ , autrement dit, si et seulement si  $a$  est dans l'image de  $D(A') \rightarrow D(A)$ . On a donc démontré la deuxième assertion du lemme.

On sait d'après le lemme d'Artin-Rees que pour tout entier  $l \gg 0$ , on a  $J \cap \mathfrak{m}_Q^l = \mathfrak{m}_Q(J \cap \mathfrak{m}_Q^{l-1}) \subset \mathfrak{m}_Q J$ . On fixe un tel entier  $l$  et on suppose, ce qui est toujours possible,  $l \geq 2$ . On a donc une 1-extension (dans  $(\text{Art}/\mathcal{O})$ )

$$0 \rightarrow J/\mathfrak{m}_Q J \rightarrow Q/(\mathfrak{m}_Q J + \mathfrak{m}_Q^l) \rightarrow R/\mathfrak{m}_R^l \rightarrow 0.$$

On identifie  $J/\mathfrak{m}_Q J$  à  $(T_{R/\mathcal{O}}^2)^*$  et on note  $\pi \in h_{R/\mathcal{O}}(R/\mathfrak{m}_R^l)$  la projection  $\pi : R \rightarrow R/\mathfrak{m}_R^l$ ; l'obstruction au relèvement de  $\pi$  à  $Q/(\mathfrak{m}_Q J + \mathfrak{m}_Q^l)$  « calculée pour  $U$  » est un élément de  $U \otimes_k (T_{R/\mathcal{O}}^2)^*$  et détermine une application  $k$ -linéaire  $T_{R/\mathcal{O}}^2 \rightarrow U$ . Il reste à voir qu'elle est injective. On fixe  $e \in T_{R/\mathcal{O}}^2 \simeq (J/\mathfrak{m}_Q J)^*$ . On forme ensuite la somme  $k \sqcup_{J/\mathfrak{m}_Q J} (Q/(\mathfrak{m}_Q J + \mathfrak{m}_Q^l))$  et l'extension correspondante notée encore  $e$

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & J/\mathfrak{m}_Q J & \longrightarrow & Q/(\mathfrak{m}_Q J + \mathfrak{m}_Q^l) & \longrightarrow & R/\mathfrak{m}_R^l \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
0 & \longrightarrow & k & \longrightarrow & k \sqcup_{J/\mathfrak{m}_Q J} (Q/(\mathfrak{m}_Q J + \mathfrak{m}_Q^l)) & \longrightarrow & R/\mathfrak{m}_R^l \longrightarrow 0.
\end{array}$$

On remarque d'une part que, par construction, l'obstruction au relèvement de  $\pi$  à  $k \sqcup_{J/\mathfrak{m}_Q J} (Q/(\mathfrak{m}_Q J + \mathfrak{m}_Q^l))$  « calculée pour  $U$  » est l'image de  $e$  par  $T_{R/\mathcal{O}}^2 \rightarrow U$  et, d'autre part, que l'obstruction au relèvement de  $\pi$  à  $k \sqcup_{J/\mathfrak{m}_Q J} (Q/(\mathfrak{m}_Q J + \mathfrak{m}_Q^l))$  « calculée pour  $T_{R/\mathcal{O}}^2$  » est  $e \in T_{R/\mathcal{O}}^2$  puisqu'on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & J/\mathfrak{m}_Q J & \longrightarrow & Q/\mathfrak{m}_Q J & \longrightarrow & R \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
0 & \longrightarrow & k & \longrightarrow & k \sqcup_{J/\mathfrak{m}_Q J} Q/\mathfrak{m}_Q J & \longrightarrow & R \longrightarrow 0 \\
& & \parallel & & \downarrow & & \parallel \\
0 & \longrightarrow & k & \longrightarrow & (k \sqcup_{J/\mathfrak{m}_Q J} (Q/(\mathfrak{m}_Q J + \mathfrak{m}_Q^l))) \times_{R/\mathfrak{m}_R^l} R & \longrightarrow & R \longrightarrow 0 \\
& & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & k & \longrightarrow & k \sqcup_{J/\mathfrak{m}_Q J} (Q/(\mathfrak{m}_Q J + \mathfrak{m}_Q^l)) & \longrightarrow & R/\mathfrak{m}_R^l \longrightarrow 0
\end{array}$$

où la flèche  $J/\mathfrak{m}_Q J \rightarrow k$  est donnée par  $e \in (J/\mathfrak{m}_Q J)^*$  et les lignes sont exactes. On en déduit l'injectivité de  $T_{R/\mathcal{O}}^2 \rightarrow U$  annoncée ; les autres propriétés ne sont pas difficiles à établir.  $\square$

On reprend les notations de la démonstration de la troisième partie du lemme précédent. Si  $e \in T_{R/\mathcal{O}}^2$ , si  $\varphi : k \sqcup_{J/\mathfrak{m}_Q J} (Q/(\mathfrak{m}_Q J + \mathfrak{m}_Q^l)) \rightarrow R/\mathfrak{m}_R^l$  est la 1-extension associée et enfin si  $\pi \in h_{R/\mathcal{O}}(R/\mathfrak{m}_R^l)$  est la projection canonique  $R \rightarrow R/\mathfrak{m}_R^l$  alors  $ob(\varphi, \pi) = e \otimes 1 \in T_{R/\mathcal{O}}^2 \otimes_k I$  (ici  $I = k$ ).

On se donne à nouveau une  $\mathcal{O}$ -algèbre locale  $R$ , noethérienne, complète de corps résiduel  $k$ . On peut montrer, ce n'est pas bien difficile, que pour toute 1-extension  $A' \rightarrow A$  dans  $(\text{Art}/\mathcal{O})$  dont le noyau  $I$  est de dimension 1 sur  $k$ , et tout morphisme  $R \rightarrow A$  de  $\mathcal{O}$ -algèbres locales, l'ensemble des relèvements de  $R \rightarrow A$  à  $A'$  est un espace principal homogène sous  $t_{R/\mathcal{O}} \simeq \text{Dér}_{\mathcal{O}}(R, I)$ .

**Corollaire 1.7.** — *Soit  $D : (\text{Art}/\mathcal{O}) \rightarrow (\text{Ens})$  un foncteur covariant pro-représentable. Soit  $R$  une  $\mathcal{O}$ -algèbre locale noethérienne, complète de corps résiduel  $k$  et soit  $\xi \in \varprojlim_i D(R/\mathfrak{m}_R^i)$  tels que le couple  $(R, \xi)$  pro-représente  $D$ . On suppose que le foncteur  $D$  a une théorie des obstructions ( $k$ -linéaire complète) à valeurs dans le  $k$ -espace vectoriel de dimension finie  $U$ . On note  $r := \dim_k(U)$  et  $d := \dim_k(\mathfrak{m}_R/(\mathfrak{m}_R^2))^*$ . On a alors  $B \simeq \mathcal{O}[[t_1, \dots, t_d]]/J$  où  $J$  est un idéal de  $\mathcal{O}[[t_1, \dots, t_d]]$  engendré par au plus  $r$  éléments.*

*Démonstration.* — On peut bien sûr déduire le résultat annoncé du lemme 1.6 ci-dessus. On peut également utiliser l'argument plus direct suivant (qui n'est finalement pas très différent) ; c'est l'argument habituellement utilisé dans la littérature.

On peut toujours supposer  $D = h_{R/\mathcal{O}}$  quitte à remplacer  $D$  par  $h_{R/\mathcal{O}}$ . On choisit  $t_1, \dots, t_d \in \mathfrak{m}_R$  tels que leurs classes engendrent  $\mathfrak{m}_R/(\mathfrak{m}_R^2)$  sur  $k$ . On a donc  $R \simeq \mathcal{O}[[t_1, \dots, t_d]]/J$  pour un idéal  $J$  convenable. On doit montrer que l'idéal  $J$  est engendré par (au plus)  $r$  éléments. On pose  $Q := \mathcal{O}[[t_1, \dots, t_d]]$ . On a  $J \subset \mathfrak{m}_Q Q + \mathfrak{m}_Q^2$ . On sait d'après le lemme d'Artin-Rees que pour tout entier  $l \gg 0$ , on a  $J \cap \mathfrak{m}_Q^l = \mathfrak{m}_Q(J \cap \mathfrak{m}_Q^{l-1}) \subset \mathfrak{m}_Q J$ . On suppose, ce qui est toujours possible,  $l \geq 2$ . On pose  $A := R/\mathfrak{m}_R^l \simeq Q/(J + \mathfrak{m}_Q^l)$  et  $A' = Q/(\mathfrak{m}_Q J + \mathfrak{m}_Q^l)$ . On note  $\varphi : A' \rightarrow A$  le morphisme induit par l'isomorphisme précédent et  $I$  son noyau. On a bien sûr  $I = (J + \mathfrak{m}_Q^l)/(\mathfrak{m}_Q J + \mathfrak{m}_Q^l) \simeq J/\mathfrak{m}_Q J$  et  $\mathfrak{m}_Q I = 0$ , autrement dit,  $A' \rightarrow A$  est une 1-extension (dans  $(\text{Art}/\mathcal{O})$ ). On considère alors l'application de passage au quotient  $R \twoheadrightarrow R/\mathfrak{m}_R^l =: A$  et l'élément  $a \in D(A)$  correspondant. On écrit alors

$$ob(\varphi, a) = \sum_{1 \leq i \leq r} u_i \otimes \bar{f}_i \in U \otimes_k I$$

où  $ob(\varphi, a)$  est l'obstruction au relèvement de  $a$  à  $A'$ ,  $(u_1, \dots, u_r)$  est une base de  $U$  sur  $k$  et, pour tout  $i \in \{1, \dots, r\}$ ,  $f_i \in J$ .

On montre ensuite que  $J$  est engendré par  $f_1, \dots, f_r$  de la façon suivante. On pose maintenant  $B' := A'/(f_1, \dots, f_r)$  et on considère  $\psi : B' \rightarrow B := A$  de noyau  $I/(f_1, \dots, f_r)$ . On sait que l'obstruction  $ob(\psi, a)$  à relever  $a$  à  $B'$  est l'image de  $ob(\varphi, a)$  par  $U \otimes_k I \rightarrow U \otimes_k (I/(f_1, \dots, f_r))$ . On a  $ob(\psi, a) = 0$  et il existe donc  $b' \in D(B')$  relevant  $a \in D(A)$  ; autrement dit, on peut relever  $R \twoheadrightarrow R/\mathfrak{m}_R^l =: A$  en un morphisme  $R \rightarrow B'$  de  $\mathcal{O}$ -algèbres.

On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 R & & \\
 \downarrow b' & \searrow a & \\
 B' & \xrightarrow{\psi} & B = A
 \end{array}$$

où l'application  $a : R \rightarrow A$  est la projection canonique. On a  $b'(\mathfrak{m}_R) \subset \mathfrak{m}_{B'}$  et donc  $b'(\mathfrak{m}_R^l) \subset \mathfrak{m}_{B'}^l$ . On en déduit que  $b'$  induit un morphisme de  $\mathcal{O}$ -algèbres  $\sigma : A = R/\mathfrak{m}_R^l \rightarrow B'$  tel que  $\psi \circ \sigma = \text{Id}_A$ . On a donc, par le lemme 1.8, l'égalité

$$J + \mathfrak{m}_Q^l = \mathfrak{m}_Q J + (f_1, \dots, f_r) + \mathfrak{m}_Q^l$$

d'où

$$J \subset \mathfrak{m}_Q J + (f_1, \dots, f_r) + J \cap \mathfrak{m}_Q^l \subset \mathfrak{m}_Q J + (f_1, \dots, f_r)$$

puisque, par choix de  $l$ , on a  $J \cap \mathfrak{m}_Q^l \subset \mathfrak{m}_Q J$ . On en déduit enfin que  $J$  est engendré par  $f_1, \dots, f_r$  par le lemme de Nakayama.  $\square$

**Lemme 1.8.** — Soient  $(\mathcal{O}, \mathfrak{m}_{\mathcal{O}})$  un anneau local,  $(B, \mathfrak{m}_B)$  une  $\mathcal{O}$ -algèbre locale telle que  $\mathfrak{m}_{\mathcal{O}} B \subset \mathfrak{m}_B$  et  $J \subset \mathfrak{m}_{\mathcal{O}} B + \mathfrak{m}_B^2$  un idéal de  $B$  de type fini. On pose  $A := B/J$  et on note  $\psi : B \rightarrow A$  la projection canonique. On suppose qu'il existe un morphisme de  $\mathcal{O}$ -algèbres locales  $\sigma : A \rightarrow B$  tel que  $\psi \circ \sigma = \text{Id}_A$ . On a alors  $J = 0$ .

*Démonstration.* — Soit  $b \in J$ . On écrit

$$b = \sum_{1 \leq i \leq s} s_i r_i + \sum_{1 \leq t \leq k} b_t c_t$$

avec  $s_i \in \mathfrak{m}_{\mathcal{O}}$ ,  $r_i \in B$ ,  $b_t \in \mathfrak{m}_B$  et  $c_t \in \mathfrak{m}_B$ ; on a

$$0 = \sigma \circ \psi(b) = \sum_{1 \leq i \leq s} s_i \sigma \circ \psi(r_i) + \sum_{1 \leq k \leq t} \sigma \circ \psi(b_t) \sigma \circ \psi(c_t).$$

On remarque ensuite que pour tout  $b \in B$  on a  $\sigma \circ \psi(b) - b \in J$  de sorte que

$$s_i \sigma \circ \psi(r_i) - s_i r_i \in \mathfrak{m}_{\mathcal{O}} J \subset \mathfrak{m}_B J$$

et

$$\sigma \circ \psi(b_t) \sigma \circ \psi(c_t) - b_t c_t \in \mathfrak{m}_B J.$$

On a donc

$$\sigma \circ \psi(b) - b \in \mathfrak{m}_B J$$

et finalement

$$J = \mathfrak{m}_B J.$$

On en déduit  $J = 0$  par le lemme de Nakayama.  $\square$

**Corollaire 1.9.** — On reprend les hypothèses du corollaire 1.7.

1. Si  $r = 0$  alors l'algèbre  $R$  est (formellement) lisse sur  $\mathcal{O}$  et  $\dim(R) = \dim(\mathcal{O}) + d$ .
2. Si  $\mathcal{O}$  est intègre alors

$$\dim(R) \geq \dim(\mathcal{O}) + d - r.$$

**1.2. Foncteur représentable.** — On fixe un schéma  $S$ . On note  $(\text{Sch}/S)$  la catégorie des  $S$ -schémas. On considère un foncteur contravariant  $F : (\text{Sch}/S) \rightarrow (\text{Ens})$ .

**Exemple 1.10.** — Soit  $X$  un  $S$ -schéma. On note

$$h_{X/S} : (\text{Sch}/S) \rightarrow (\text{Ens})$$

le foncteur (contravariant)  $\text{Hom}_S(\bullet, X)$ ; on note aussi  $X(T)$  l'ensemble  $h_{X/S}(T)$  où  $T$  est un  $S$ -schéma ou encore  $X(k)$  lorsque  $T$  est le spectre d'un anneau  $k$ . On appelle  $h_{X/S}$  le foncteur des points du  $S$ -schéma  $X$ .

On montre que l'application qui à un morphisme de foncteurs  $t : h_{X/S} \rightarrow F$  associe  $t(X)(\text{Id}_X) \in F(X)$  où  $\text{Id}_X \in h_{X/S}(X) = \text{Hom}_S(X, X)$  est l'application identité induit une bijection de l'ensemble des morphismes de foncteurs  $h_{X/S} \rightarrow F$  sur  $F(X)$ .

**Définition 1.11.** — On dit que le foncteur  $F$  est représentable s'il existe un  $S$ -schéma  $X$  et  $\xi \in F(X)$  tel que le morphisme de foncteurs  $h_{X/S} \rightarrow F$  induit par  $\xi$  soit un isomorphisme; on dit alors que le couple  $(X, \xi)$  représente  $F$ . On dit aussi parfois que le schéma  $X$  représente  $F$ .

On peut exprimer beaucoup des propriétés d'un  $S$ -schéma  $X$  au moyen du foncteur des points  $h_{X/S}$  (voir par exemple [Gro61, Proposition 7.2.3] et [Gro61, Théorème 7.2.8]). On en donnera un autre exemple un peu plus loin dans ces notes (voir le lemme 2.6).

**Lemme 1.12.** — Soit  $k$  un corps. On pose  $k[\varepsilon] := k[t]/(t^2)$  où  $\varepsilon = \bar{t}$ . Soit  $x \in X(k)$ ; on note  $s$  son image dans  $S$ . Soit  $\bullet$  l'unique point de  $\text{Spec}(k[\varepsilon])$ . On a une bijection de l'espace tangent de Zariski relatif  $(\mathfrak{m}_{\mathcal{O}_{X,x}}/(\mathfrak{m}_{\mathcal{O}_{S,s}} + \mathfrak{m}_{\mathcal{O}_{X,x}}^2))^*$  sur l'ensemble des  $S$ -morphisms  $\text{Spec}(k[\varepsilon]) \rightarrow X$  qui appliquent  $\bullet$  sur  $x$  où  $\text{Spec}(k[\varepsilon]) \rightarrow S$  est le morphisme constant  $\text{Spec}(k[\varepsilon]) \rightarrow \{s\} \subset S$ .

*Démonstration.* — La donnée d'un morphisme  $\text{Spec}(k[\varepsilon]) \rightarrow X$  au-dessus de  $S$  qui applique  $\bullet$  sur  $x$  est équivalente à la donnée d'un morphisme de  $\mathcal{O}_{S,s}$ -algèbres locales  $\mathcal{O}_{X,x} \rightarrow k[\varepsilon]$  où  $k[\varepsilon]$  est une algèbre sur  $\mathcal{O}_{S,s}$  via  $\mathcal{O}_{S,s} \rightarrow k(s) \subset k \subset k[\varepsilon]$  ou encore à la donnée d'un morphisme de  $\mathcal{O}_{S,s}$ -algèbres  $\mathcal{O}_{X,x} \rightarrow k[\varepsilon]$  tel que le morphisme induit  $\mathcal{O}_{X,x} \rightarrow k[\varepsilon] \rightarrow k[\varepsilon](\varepsilon)$  s'identifie au morphisme  $\mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_{\mathcal{O}_{X,x}} = k$ ; on montre que deux tels morphismes diffèrent d'une  $\mathcal{O}_{S,s}$ -dérivation sur  $\mathcal{O}_{X,x}$  à valeurs dans  $\varepsilon k \subset k[\varepsilon]$  et enfin que l'ensemble desdits morphismes est un espace principal homogène sous  $\text{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\Omega_{\mathcal{O}_{X,x}/\mathcal{O}_{S,s}}^1, \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_{\mathcal{O}_{X,x}})$ . Il reste à remarquer que l'application de restriction

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\Omega_{\mathcal{O}_{X,x}/\mathcal{O}_{S,s}}^1, k(x)) \simeq \text{Dér}_{\mathcal{O}_{S,s}}(\mathcal{O}_{X,x}, k(s)) \rightarrow \text{Hom}_{k(x)}(\mathfrak{m}_{\mathcal{O}_{X,x}}/(\mathfrak{m}_{\mathcal{O}_{S,s}} + \mathfrak{m}_{\mathcal{O}_{X,x}}^2), k(x))$$

est en fait un isomorphisme.  $\square$

**Remarque 1.13.** — L'ensemble des  $S$ -morphisms  $\text{Spec}(k[\varepsilon]) \rightarrow X$  qui appliquent  $\bullet$  sur  $x$  est en fait un ensemble pointé par le morphisme de  $S$ -schémas correspondant au morphisme de  $\mathcal{O}_{S,s}$ -algèbres locales  $\mathcal{O}_{X,x} \rightarrow k(x) = k \subset k[\varepsilon]$ ; il est donc muni d'une structure naturelle un  $k$ -espace vectoriel faisant de la bijection ci-dessus un isomorphisme de  $k$ -espaces vectoriels.

**Remarque 1.14.** — Soit  $S$  un schéma de type fini sur un corps  $k$  et  $F : (\text{Sch}/S) \rightarrow (\text{Ens})$  un foncteur contravariant représentable. Soit  $X$  un  $S$ -schéma et  $\xi \in F(X)$  tels que le couple  $(X, \xi)$  représente  $F$ . On suppose le schéma  $X$  localement de type fini sur  $S$ . Soit  $x \in X$  un  $k$ -point au-dessus de  $s \in S$ .

On note  $(\hat{\mathcal{O}}_s, \mathfrak{m}_{\hat{\mathcal{O}}_s}) := (\hat{\mathcal{O}}_{S,s}, \mathfrak{m}_{\hat{\mathcal{O}}_{S,s}})$  le complété formel de l'anneau local  $(\mathcal{O}_{S,s}, \mathfrak{m}_{\mathcal{O}_{S,s}})$  de  $S$  en  $s$  et  $(\hat{\mathcal{O}}_x, \mathfrak{m}_{\hat{\mathcal{O}}_x}) := (\hat{\mathcal{O}}_{X,x}, \mathfrak{m}_{\hat{\mathcal{O}}_{X,x}})$  le complété formel de l'anneau local  $(\mathcal{O}_{X,x}, \mathfrak{m}_{\mathcal{O}_{X,x}})$  de  $X$  en  $x$ .



On note  $D_x : (\text{Art}/\mathcal{O}_s) \rightarrow (\text{Ens})$  le foncteur covariant qui à tout objet  $A$  de  $(\text{Art}/\mathcal{O}_s)$  associe l'ensemble des éléments de  $F(\text{Spec}(A))$  qui sont envoyés sur  $x \in F(\text{Spec}(k))$  par  $F(\text{Spec}(A)) \rightarrow F(\text{Spec}((A/\mathfrak{m}_A) = k))$ , autrement dit, l'ensemble des  $S$ -morphisms de  $\text{Spec}(A) \rightarrow X$  qui envoient le point fermé de  $\text{Spec}(A)$  sur  $x \in X$ . On déduit de  $\xi$  un élément  $\xi_x \in \varprojlim_i D_x(R_x/\mathfrak{m}_{R_x}^i)$  par

$$F(X) \rightarrow F(\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})) \rightarrow F(\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_{\mathcal{O}_{X,x}}^i)) = F(\text{Spec}(R_x/\mathfrak{m}_{R_x}^i)) ;$$

le couple  $(R_x, \xi_x)$  pro-représente le foncteur  $D_x$ .

On peut toujours exprimer  $T_{R_x/\mathcal{O}_s}^1 = \mathfrak{m}_{R_x}/(\mathfrak{m}_{\mathcal{O}_s}R_x + \mathfrak{m}_{R_x}^2)^*$  à l'aide du foncteur  $F$  d'après le lemme 1.12. On observera qu'on peut aussi quelquefois montrer que le foncteur  $h_{R_x/\mathcal{O}_s} : (\text{Art}/\mathcal{O}_s) \rightarrow (\text{Ens})$  a une théorie des obstructions  $k$ -linéaire complète à valeurs dans un  $k$ -espace vectoriel de dimension finie  $U$  à l'aide du foncteur  $F$ . On a fait le lien avec le paragraphe précédent.

## 2. Les morphismes de schémas et leurs espaces de modules

**2.1. Définitions.** — On cherche à paramétrer raisonnablement l'ensemble des morphismes  $f : Y \rightarrow X$  où  $Y$  et  $X$  sont des schémas donnés.

Soient  $X$  et  $Y$  deux schémas de type fini sur un schéma noethérien  $S$ ,  $Z \subset X$  un sous-schéma fermé et  $g : Z \rightarrow Y$  un  $S$ -morphisme.

On considère maintenant le foncteur contravariant

$$\text{Hom}_S(Y, X; g) : (\text{Sch}/S) \rightarrow (\text{Ens})$$

défini par, pour tout  $S$ -schéma  $T$

$$\text{Hom}_S(Y, X; g)(T) := \{f : Y \times_S T/T \rightarrow X \times_S T/T \mid f|_{Z \times_S T} = g \times_S \text{Id}_T\}$$

et, pour tout morphisme de  $S$ -schémas  $T' \rightarrow T$ ,

$$\begin{aligned} \text{Hom}_S(Y, X; g)(T) &\rightarrow \text{Hom}_S(Y, X; g)(T') \\ f &\mapsto f \times_T \text{Id}_{T'}. \end{aligned}$$

On suppose  $Y$  et  $X$  projectifs sur  $S$ . On fixe  $P \in \mathbf{Q}[t]$  et  $\mathcal{O}_X(1)$  un fibré inversible sur  $X$  ample sur  $S$ . On considère aussi le foncteur contravariant

$$\text{Hom}_S^P(Y, X; g) : (\text{Sch}/S) \rightarrow (\text{Ens})$$

défini par, pour tout  $S$ -schéma  $T$

$$\text{Hom}_S^P(Y, X; g)(T) := \{f \in \text{Hom}_S(Y, X; g)(T) \mid \forall t \in T, \forall m \in \mathbf{Z}, \text{ on ait } \chi(Y_t, f_t^* \mathcal{O}_{X_t}(m)) = P(m)\}$$

où  $Y_t := Y \times_S \{t\}$ ,  $X_t := X \times_S \{t\}$  et  $f_t : Y_t \rightarrow X_t$  est le morphisme déduit de  $f$  par restriction à  $Y_t$ . On note que  $Y_t$  s'identifie à  $Y_s \otimes k(t)$  où  $Y_s$  est la fibre de  $Y$  en l'image  $s$  de  $t$  dans  $S$ . On pose à nouveau, pour tout morphisme de  $S$ -schémas  $T' \rightarrow T$ ,

$$\begin{aligned} \text{Hom}_S^P(Y, X; g)(T) &\rightarrow \text{Hom}_S^P(Y, X; g)(T') \\ f &\mapsto f \times_T \text{Id}_{T'}. \end{aligned}$$

On note  $\text{Hom}_S(Y, X) : (\text{Sch}/S) \rightarrow (\text{Ens})$  (resp.  $\text{Hom}_S^P(Y, X) : (\text{Sch}/S) \rightarrow (\text{Ens})$ ) le foncteur obtenu en oubliant la condition de compatibilité avec  $g : Z \rightarrow X$ .

**Remarque 2.1.** — La donnée d'un  $T$ -morphisme  $Y \times_S T \rightarrow X \times_S T$  est équivalente à la donnée d'un  $S$ -morphisme  $Y \times_S T \rightarrow X$ . On notera par la suite l'un ou l'autre de ces deux morphismes avec le même symbole.

Le résultat suivant est essentiellement dû à Grothendieck (voir [Gro95, Exposé 221] et [Mor79, Proposition 1]).

**Théorème 2.2.** — *On suppose  $Y$  et  $Z$  projectifs et plats sur  $S$  et  $X$  projectif sur  $S$ .*

1. *Le foncteur  $\mathrm{Hom}_S(Y, X)$  est représentable par un couple*

$$(\mathrm{Hom}_S(Y, X), ev)$$

*où  $\mathrm{Hom}_S(Y, X)$  est un  $S$ -schéma localement quasi-projectif sur  $S$  et*

$$ev : Y \times_S \mathrm{Hom}_S(Y, X) \rightarrow X$$

*un  $S$ -morphisme appelé morphisme d'évaluation universel.*

2. *Le foncteur  $\mathrm{Hom}_S(Y, X; g)$  est représentable par un couple*

$$(\mathrm{Hom}_S(Y, X; g), ev|_{\mathrm{Hom}_S(Y, X; g)})$$

*où  $\mathrm{Hom}_S(Y, X; g)$  est un sous-schéma fermé de  $\mathrm{Hom}_S(Y, X)$ .*

3. *Le foncteur  $\mathrm{Hom}_S^P(Y, X)$  (resp.  $\mathrm{Hom}_S^P(Y, X; g)$ ) est représentable par un sous-schéma ouvert de  $\mathrm{Hom}_S(Y, X)$  (resp.  $\mathrm{Hom}_S(Y, X; g)$ ) et quasi-projectif sur  $S$ .*

On remarque que le morphisme d'évaluation universel est ensemblistement donné par

$$\begin{aligned} Y \times_S \mathrm{Hom}_S(Y, X) &\rightarrow X \\ (y, [f_s]) &\mapsto f_s(y). \end{aligned}$$

On note encore

$$ev : Y \times_S \mathrm{Hom}_S(Y, X; g) \rightarrow X$$

la restriction du morphisme  $ev$  au fermé  $Y \times_S \mathrm{Hom}_S(Y, X; g)$  de  $Y \times_S \mathrm{Hom}_S(Y, X)$ . Si  $T$  est un  $S$ -schéma et  $f : Y \times_S T \rightarrow X$  est un  $S$ -morphisme tel que  $(f \times_S \mathrm{Id}_T)|_{Z \times_S T} = g \times_S \mathrm{Id}_T$  il existe donc un unique morphisme  $c : T \rightarrow \mathrm{Hom}_S(Y, X; g)$  tel que l'application  $f$  soit obtenue par

$$Y \times_S T \xrightarrow{\mathrm{Id}_Y \times c} Y \times_S \mathrm{Hom}_S(Y, X; g) \xrightarrow{ev} X$$

et qui, ensemblistement, est donné par

$$\begin{aligned} T &\rightarrow \mathrm{Hom}_S(Y, X; g) \\ t &\mapsto [f_t]. \end{aligned}$$

On note aussi  $\mathrm{Hom}_k(Y, X)$  (ou simplement  $\mathrm{Hom}(Y, X)$ ) le schéma  $\mathrm{Hom}_S(Y, X)$  lorsque  $S$  est le spectre d'un anneau  $k$ .

**Remarque 2.3.** — On déduit de la « propriété universelle » du  $S$ -schéma  $\mathrm{Hom}_S(Y, X; g)$  que, pour tout  $s \in S$ , la fibre de  $\mathrm{Hom}_S(Y, X; g) \rightarrow S$  s'identifie au schéma  $\mathrm{Hom}_{k(s)}(Y_s, X_s; g_s)$ .

**Exemple 2.4.** — Soient  $k$  un corps algébriquement clos et  $S := \text{Spec}(k)$ . Soient  $V$  un  $k$ -espace vectoriel de dimension finie  $\geq 2$ ,  $W$  un  $k$ -espace vectoriel de dimension 2 et  $d$  un entier. Soit enfin  $T$  un  $k$ -schéma. On sait d'après [Har77, Chap. II Theorem 7.1] qu'il revient au même de se donner un morphisme  $f_T : \mathbf{P}(W) \times T \rightarrow \mathbf{P}(V)$  ou de se donner un fibré inversible  $L_T$  sur  $\mathbf{P}(W) \times T$  et un morphisme surjectif  $V \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(W) \times T} \rightarrow L_T$  modulo la relation d'équivalence pour laquelle  $V \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(W) \times T} \rightarrow L_T$  et  $V \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(W) \times T} \rightarrow L'_T$  sont équivalents s'il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} V \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(W) \times T} & \longrightarrow & L_T \\ & \searrow & \downarrow \wr \\ & & L'_T. \end{array}$$

On a  $f_T \in \text{Hom}_k^d(\mathbf{P}(W), \mathbf{P}(V))$  si et seulement si  $L_T \simeq p_T^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}(W)}(d) \otimes q_T^* M_T$  avec  $M_T$  inversible sur  $T$  où  $p_T$  (resp.  $q_T$ ) désigne la projection canonique sur  $\mathbf{P}(W)$  (resp.  $T$ ). Et, finalement, il revient au même de se donner  $f_T \in \text{Hom}_k^d(\mathbf{P}(W), \mathbf{P}(V))$  ou de se donner un fibré inversible  $M_T$  sur  $T$  et un morphisme  $V \otimes S^d(W^*) \otimes \mathcal{O}_T \rightarrow M_T$  tel que l'application induite  $V \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(W) \times T} \rightarrow p_T^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}(W)}(d) \otimes q_T^* M_T$  soit surjective (modulo la relation d'équivalence évidente). On obtient en particulier un  $T$ -point du schéma  $\mathbf{P}(V \otimes S^d(W^*))$  ou encore un morphisme  $T \rightarrow \mathbf{P}(V \otimes S^d(W^*))$ . On vérifie sans peine que le schéma  $\text{Hom}_k^d(\mathbf{P}(W), \mathbf{P}(V))$  est un ouvert convenable de  $\mathbf{P}(V \otimes S^d(W^*))$ .

**Exemple 2.5.** — On reprend les notations de l'exemple précédent. On fixe une hypersurface  $X \subset \mathbf{P}(V)$  définie par une équation homogène  $F \in S^e(V)$  (de degré  $e \geq 1$ ). Il revient au même de se donner  $f_T \in \text{Hom}_k^d(\mathbf{P}(W), X)$  ou de se donner  $f_T \in \text{Hom}_k^d(\mathbf{P}(W), \mathbf{P}(V))$  se factorisant à travers  $X \subset \mathbf{P}(V)$ , autrement dit, il revient au même de se donner  $f_T \in \text{Hom}_k^d(\mathbf{P}(W), X)$  ou de se donner un fibré inversible  $M_T$  sur  $T$  et un morphisme  $V \otimes S^d(W^*) \otimes \mathcal{O}_T \rightarrow M_T$  tel que l'application induite  $V \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(W) \times T} \rightarrow p_T^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}(W)}(d) \otimes q_T^* M_T$  soit surjective et tel que la section (constante)  $F \otimes 1_T \in H^0(T, S^e(V) \otimes \mathcal{O}_T) = S^e(V) \otimes H^0(T, \mathcal{O}_T)$  soit dans le noyau de l'application  $H^0(T, S^e(V) \otimes \mathcal{O}_T) \rightarrow H^0(T, S^e(S^d(W) \otimes M_T)) \rightarrow H^0(T, S^{ed}(W) \otimes M_T^{\otimes e})$  (modulo la relation d'équivalence évidente). On en déduit que  $\text{Hom}_k^d(\mathbf{P}(W), X)$  est défini dans  $\text{Hom}_k^d(\mathbf{P}(W), \mathbf{P}(V)) \subset \mathbf{P}(V \otimes S^d(W^*))$  par  $ed + 1$  équations homogènes.

**2.2. Étude infinitésimale.** — On rappelle la caractérisation des morphismes lisses par Grothendieck. On fixe un schéma  $S$  localement noethérien.

**Lemme 2.6** ([sga03, Exposé 3, Théorème 3.1]). — *Soit  $h : X \rightarrow S$  un morphisme localement de type fini où  $X$  est un schéma. Alors  $h$  est lisse si et seulement si pour tout  $S$ -schéma affine  $Y'$ , tout sous-schéma fermé  $Y$  de  $Y'$  défini par un idéal nilpotent, tout  $S$ -morphisme  $f : Y \rightarrow X$  et tout  $y \in Y'$ , il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $y$  dans  $Y'$  et un prolongement  $f'$  de  $f|_U$  en un  $S$ -morphisme  $U \rightarrow X$ .*

Soient  $X$  un espace topologique,  $\mathcal{G}$  un faisceau de groupes sur  $X$  et  $\mathcal{T}$  un faisceau d'ensemble sur lequel  $\mathcal{G}$  opère à droite. On dit que  $\mathcal{T}$  est un pseudo-torseur sous  $\mathcal{G}$  si l'homomorphisme

$$\mathcal{G} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T} \times \mathcal{T}$$

déduit de l'opération de  $\mathcal{G}$  sur  $\mathcal{T}$  est un isomorphisme, de façon équivalente, si pour tout ouvert  $U$  de  $X$ ,  $\mathcal{T}(U)$  est ou bien vide ou bien un espace principal homogène sous le groupe  $\mathcal{G}(U)$ . On dit que  $\mathcal{T}$  est un torseur sous  $\mathcal{G}$  si  $\mathcal{T}$  est un pseudo-torseur sous  $\mathcal{G}$  et si pour tout  $x \in X$ , il existe un voisinage ouvert  $U_x$  de  $x$  tel que  $\mathcal{T}(U_x)$  soit non vide.

Soit  $\mathcal{T}$  un torseur sous  $\mathcal{G}$ . On considère un recouvrement ouvert  $(U_i)_{i \in I}$  de  $X$  tel que  $\mathcal{T}(U_i) \neq \emptyset$  pour tout  $i \in I$ . Soit  $t_i \in \mathcal{T}(U_i)$ . Si  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  alors il existe un et seul élément  $g_{ij} \in \mathcal{G}(U_i \cap U_j)$  tel que  $g_{ij} \cdot (t_j|_{U_i \cap U_j}) = t_i|_{U_i \cap U_j}$ ; si  $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$  alors  $g_{ik}|_{U_i \cap U_j \cap U_k} = g_{ij}|_{U_i \cap U_j \cap U_k} g_{jk}|_{U_i \cap U_j \cap U_k}$ . On obtient ainsi un 1-cocycle du recouvrement  $(U_i)_{i \in I}$  à valeurs dans  $\mathcal{G}$ . On vérifie alors facilement le résultat suivant.

**Lemme 2.7.** — *Soient  $X$  un espace topologique et  $\mathcal{G}$  un faisceau de groupes sur  $X$ . Alors l'ensemble des classes à isomorphisme près de torseurs sous  $\mathcal{G}$  s'identifie au groupe de cohomologie  $H^1(X, \mathcal{G})$ . On a ainsi pour tout torseur  $\mathcal{T}$  sous  $\mathcal{G}$  une classe de cohomologie dans  $H^1(X, \mathcal{G})$  qui est triviale si et seulement si  $\mathcal{T}$  admet une section globale.*

**Proposition 2.8** ([sga03, Exposé 3, Proposition 5.1]). — *Soient  $X$  un schéma et  $h : X \rightarrow S$  un morphisme localement de type fini. Soient  $Y'$  un  $S$ -schéma,  $Y \subset Y'$  un sous-schéma fermé de  $Y'$  défini par un idéal  $\mathcal{I}_{Y/Y'}$  sur  $Y$  de carré nul,  $f : Y \rightarrow X$  un  $S$ -morphisme,  $Z' \subset Y'$  un sous-schéma fermé et enfin  $g' : Z' \rightarrow X$  un  $S$ -morphisme. Soit  $\mathcal{T}(f; g')$  le faisceau (d'ensemble) sur  $Y'$  dont les sections sur un ouvert  $U$  sont les prolongements  $f' : U \rightarrow X$  de  $f|_{U \cap Y}$  tels que  $f'|_{U \cap Z'} = g'|_{U \cap Z'}$ .*

1. *Le faisceau  $\mathcal{T}(f; g')$  est de façon naturelle un pseudo-torseur sous le faisceau de groupes commutatif*

$$\mathcal{G} = \text{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(f^* \Omega_{X/S}^1, \mathcal{I}_{Y/Y'} \cap \mathcal{I}_{Z'/Y'}).$$

2. *Si  $h$  est lisse alors  $\mathcal{T}(f; g')$  est même un torseur sous  $\mathcal{G}$ .*

*Démonstration.* — Supposons qu'il existe un relèvement  $f'_0 : Y' \rightarrow X$  de  $f$  tel que  $f'_0|_{Z'} = g'$ . On a donc un diagramme

$$\begin{array}{ccccc} & & & & X \\ & & & \nearrow f & \downarrow h \\ Y & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & S \\ & \searrow & \swarrow & & \uparrow g' \\ & & Z & \longrightarrow & Z' \end{array}$$

On cherche une bijection canonique  $\text{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(f^* \Omega_{X/S}^1, \mathcal{I}_{Y/Y'} \cap \mathcal{I}_{Z'/Y'}) \simeq \mathcal{T}(f; g')(Y')$ . Il revient au même de se donner un relèvement  $f' : Y' \rightarrow X$  de  $f$  tel que  $f'|_{Z'} = g'$  ou un  $S$ -morphisme  $h = (f'_0, f') : Y' \rightarrow X \times_S X$  tel que  $p_1 \circ h = f'_0$ ,  $h|_Y = (f, f)$  et  $h|_{Z'} = (g', g')$  où  $p_1 : X \times_S X \rightarrow X$  désigne la projection canonique sur le premier facteur et, si on note  $X_1$  le premier voisinage infinitésimal de l'immersion diagonale  $\Delta_{X/S}$ , un tel  $h$  se factorise de façon unique en  $Y' \rightarrow X_1$ , puisque d'une part, l'idéal de définition de  $Y$  dans  $Y'$  est de carré nul, et d'autre part,  $h|_Y$  se factorise à travers  $\Delta_{X/S}$ . On identifie (à l'aide de  $p_1$ )  $X_1$  au schéma  $\text{Spec}_X(\mathcal{O}_X \oplus \Omega_{X/S}^1)$  où le deuxième terme est considéré comme un idéal de carré nul. Le morphisme diagonal correspond alors à l'augmentation canonique  $\mathcal{O}_X \oplus \Omega_{X/S}^1 \rightarrow \mathcal{O}_X$ . On en déduit qu'il revient au même de se donner un tel  $h$  ou une section du  $Y'$ -schéma  $Y' \times_X X_1 \simeq \text{Spec}_{Y'}(\mathcal{O}_{Y'} \oplus f_0'^* \Omega_{X/S}^1)$  qui, d'une part relève la section  $(\text{Id}_Y, (f, f)) : Y \times_X X_1 \subset Y' \times_X X_1$  de  $Y \times_X X_1$  sur  $Y$ , laquelle correspond à l'augmentation canonique  $\mathcal{O}_Y \oplus f^* \Omega_{X/S}^1 \rightarrow \mathcal{O}_Y$  lorsqu'on a identifié  $Y \times_X X_1$  à  $\text{Spec}_Y(\mathcal{O}_Y \oplus f^* \Omega_{X/S}^1)$ , et d'autre part induit par restriction à  $Z'$  l'application  $(\text{Id}_{Z'}, (g', g')) : Z' \rightarrow Z' \times_X X_1$ , laquelle correspond à l'augmentation canonique  $\mathcal{O}_{Z'} \oplus g'^* \Omega_{X/S}^1 \rightarrow \mathcal{O}_{Z'}$  lorsqu'on a identifié  $Z' \times_X X_1$  à  $\text{Spec}_{Z'}(\mathcal{O}_{Z'} \oplus g'^* \Omega_{X/S}^1)$ .

On a donc identifié l'ensemble des relèvements  $f' : Y' \rightarrow X$  de  $f$  tels que  $f'|_{Z'} = g'$  avec l'ensemble des morphismes de  $\mathcal{O}_{Y'}$ -algèbres  $\mathcal{O}_{Y'} \oplus f_0'^* \Omega_{X/S}^1 \rightarrow \mathcal{O}_{Y'}$  qui induisent les augmentations canoniques par restriction à  $Y$  et  $Z'$  ou encore avec l'ensemble des morphismes de  $\mathcal{O}_{Y'}$ -modules  $f_0'^* \Omega_{X/S}^1 \rightarrow \mathcal{O}_{Y'}$  nuls sur  $Y \cup Z'$ , autrement dit avec

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{Y'}}(f_0'^* \Omega_{X/S}^1, \mathcal{I}_{Y/Y'} \cap \mathcal{I}_{Z'/Y'}).$$

On remarque enfin que  $\mathcal{I}_{Y/Y'} \cap \mathcal{I}_{Z'/Y'}$  est naturellement un  $\mathcal{O}_Y$ -module puisque  $\mathcal{I}_{Y/Y'}(\mathcal{I}_{Y/Y'} \cap \mathcal{I}_{Z'/Y'}) \subset \mathcal{I}_{Y/Y'}^2 = 0$ ; d'où

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{Y'}}(f_0'^* \Omega_{X/S}^1, \mathcal{I}_{Y/Y'} \cap \mathcal{I}_{Z'/Y'}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(f^* \Omega_{X/S}^1, \mathcal{I}_{Y/Y'} \cap \mathcal{I}_{Z'/Y'}).$$

On en déduit facilement la première assertion de la proposition; la deuxième résulte immédiatement de la première et du lemme 2.6.  $\square$

**Proposition 2.9** ([Mor79, Proposition 2]). — *On suppose  $Y$  et  $Z$  projectifs et plats sur  $S$  et  $X$  projectif et lisse sur  $S$ . Soient  $T \subset T'$  des  $S$ -schémas affines avec  $\mathcal{I}^2 = 0$ ,  $f \in \mathrm{Hom}_S(Y, X; g)(T)$  et  $f' \in \mathrm{Hom}_S(Y, X; g)(T')$ .*

1. On associe à  $f$  une classe de cohomologie dans

$$\mathrm{H}^1(Y \times_S T, f^* T_{X/S} \otimes_{\mathcal{O}_{Y \times_S T}} \mathcal{I}_{Z \times_S T / Y \times_S T} \otimes_{\mathcal{O}_T} \mathcal{I})$$

(où  $\mathcal{I}$  est naturellement un  $\mathcal{O}_T$ -module puisque  $\mathcal{I}^2 = 0$ ) qui est nulle si et seulement s'il existe un relèvement  $f' \in \mathrm{Hom}_S(Y, X; g)(T')$  de  $f$ .

2. L'ensemble de ces relèvements est ou bien vide ou bien un espace principal homogène sous

$$\mathrm{H}^0(Y \times_S T, f^* T_{X/S} \otimes_{\mathcal{O}_{Y \times_S T}} \mathcal{I}_{Z \times_S T / Y \times_S T} \otimes_{\mathcal{O}_T} \mathcal{I}).$$

*Démonstration.* — On utilise bien sûr la proposition précédente et le lemme 2.7 : il suffit de montrer qu'on a une identification

$$\mathcal{I}_{Z \times_S T' / Y \times_S T'} \cap \mathcal{I}_{Y \times_S T / Y \times_S T'} \simeq \mathcal{I}_{Z \times_S T / Y \times_S T} \otimes_{\mathcal{O}_T} \mathcal{I}.$$

On a une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_{Z \times_S T' / Y \times_S T'} \cap \mathcal{I}_{Y \times_S T / Y \times_S T'} \rightarrow \mathcal{I}_{Y \times_S T / Y \times_S T'} \rightarrow \mathcal{I}_{Z \times_S T / Z \times_S T'} \rightarrow 0.$$

On a également des isomorphismes naturels

$$\mathcal{O}_{Y \times_S T'} \otimes_{\mathcal{O}_{T'}} \mathcal{I} \simeq \mathcal{I}_{Y \times_S T / Y \times_S T'}$$

et

$$\mathcal{O}_{Z \times_S T'} \otimes_{\mathcal{O}_{T'}} \mathcal{I} \simeq \mathcal{I}_{Z \times_S T / Z \times_S T'}$$

puisque  $Y$  et  $Z$  sont plats sur  $S$ . On obtient

$$\mathcal{I}_{Z \times_S T' / Y \times_S T'} \cap \mathcal{I}_{Y \times_S T / Y \times_S T'} \simeq \mathcal{I}_{Z \times_S T' / Y \times_S T'} \otimes_{\mathcal{O}_T} \mathcal{I}$$

et enfin

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{Z \times_S T' / Y \times_S T'} \otimes_{\mathcal{O}_T} \mathcal{I} &\simeq (\mathcal{I}_{Z \times_S T / Y \times_S T} \otimes_{\mathcal{O}_{Y \times_S T}} \mathcal{O}_{Y \times_S T'}) \otimes_{\mathcal{O}_T} \mathcal{I} \\ &\simeq \mathcal{I}_{Z \times_S T / Y \times_S T} \otimes_{\mathcal{O}_T} \mathcal{I} \end{aligned}$$

puisque  $Z$  est plat sur  $S$  et  $\mathcal{I}^2 = 0$ .  $\square$

On obtient en particulier l'énoncé suivant.

**Corollaire 2.10.** — *On suppose  $S$  de type fini sur un corps  $k$ ,  $Y$  et  $Z$  projectifs et plats sur  $S$  et  $X$  projectif et lisse sur  $S$ . Soient  $T = \text{Spec}(A'/I) \subset T' = \text{Spec}(A')$  des  $S$ -schémas où  $A'$  est un anneau artinien local de corps résiduel  $k$  et  $\mathfrak{m}_{A'}I = 0$ ,  $f \in \text{Hom}_S(Y, X; g)(T)$ . On note  $s \in S$  l'image du point fermé de  $T'$  dans  $S$ .*

1. *L'obstruction au relèvement de  $f \in \text{Hom}_S(Y, X; g)(T)$  en  $f' \in \text{Hom}_S(Y, X; g)(T')$  est un élément de*

$$H^1(Y_s, f_s^*T_{X_s} \otimes_{\mathcal{O}_{Y_s}} \mathcal{I}_{Z_s/Y_s}) \otimes_k I$$

2. *L'ensemble de ces relèvements est ou bien vide ou bien un espace principal homogène sous*

$$H^0(Y_s, f_s^*T_{X_s} \otimes_{\mathcal{O}_{Y_s}} \mathcal{I}_{Z_s/Y_s}) \otimes_k I.$$

On déduit enfin des lemmes 1.6 et 1.12 et des corollaires 1.9 et 2.10 le principal résultat de ce paragraphe.

**Théorème 2.11.** — *On suppose  $S$  de type fini sur un corps  $k$  algébriquement clos,  $Y$  et  $Z$  projectifs et plats sur  $S$  et  $X$  projectif et lisse sur  $S$ . Soit  $s \in S(k)$  et soit  $[f : Y_s \rightarrow X_s] \in \text{Hom}_S(Y, X; g)(k)$ .*

1. *L'espace tangent de Zariski relatif du  $S$ -schéma  $\text{Hom}_S(Y, X; g)$  en  $[f]$  est isomorphe à*

$$H^0(Y_s, f_s^*T_{X_s} \otimes_{\mathcal{O}_{Y_s}} \mathcal{I}_{Z_s/Y_s}).$$

2. *On suppose ici  $S$  intègre. La dimension de toute composante irréductible de  $\text{Hom}_S(Y, X; g)$  passant par  $[f]$  est au moins*

$$h^0(Y_s, f_s^*T_{X_s} \otimes_{\mathcal{O}_{Y_s}} \mathcal{I}_{Z_s/Y_s}) - h^1(Y_s, f_s^*T_{X_s} \otimes_{\mathcal{O}_{Y_s}} \mathcal{I}_{Z_s/Y_s}) + \dim(S).$$

3. *Si  $h^1(Y_s, f_s^*T_{X_s} \otimes_{\mathcal{O}_{Y_s}} \mathcal{I}_{Z_s/Y_s}) = 0$  alors  $\text{Hom}_S(Y, X; g)$  est lisse sur  $S$  en  $[f]$ , de dimension relative  $h^0(Y_s, f_s^*T_{X_s} \otimes_{\mathcal{O}_{Y_s}} \mathcal{I}_{Z_s/Y_s})$ .*

On peut remarquer que si  $Y$  est une courbe (projective) lisse sur  $S = \text{Spec}(k)$  ( $k$  algébriquement clos) et  $Z$  est un sous-schéma fermé de longueur finie  $\ell(Z)$  alors

$$\begin{aligned} h^0(Y, f^*T_X \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{I}_{Z/Y}) - h^1(Y, f^*T_X \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{I}_{Z/Y}) &= \chi(Y, f^*T_X \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{I}_{Z/Y}) \\ &= -K_Y \cdot f_Y + (1 - g(Y) - \ell(Z)) \dim(X). \end{aligned}$$

On suppose toujours  $S = \text{Spec}(k)$  où  $k$  est un corps algébriquement clos. On suppose également  $Y$  lisse et on suppose que le morphisme  $f : Y \rightarrow X$  est une immersion fermée. On peut alors interpréter géométriquement le calcul de l'espace tangent au schéma  $\text{Hom}_S(Y, X)$  en  $[f]$  de la façon suivante. On considère la suite exacte courte  $0 \rightarrow T_Y \rightarrow T_{X|Y} \rightarrow N_{Y/X} \rightarrow 0$  et le début de la suite exacte longue associée en cohomologie

$$0 \rightarrow H^0(Y, T_Y) \rightarrow H^0(Y, T_{X|Y}) \rightarrow H^0(Y, N_{Y/X}).$$

Le  $k$ -espace vectoriel  $H^0(Y, T_Y)$  est bien sûr l'algèbre de Lie du groupe  $\text{Aut}(Y)$  des automorphismes de  $Y$  et correspond donc à l'action (infinitésimale) de  $\text{Aut}(Y)$  sur  $Y$  alors que  $H^0(Y, N_{Y/X})$  correspond aux déformations (infinitésimales) de  $Y$  dans  $X$ .

On conclut ce paragraphe avec le calcul de l'application tangente au morphisme d'évaluation universel.

**Proposition 2.12.** — On suppose  $S = \text{Spec}(k)$  où  $k$  est un corps algébriquement clos,  $Y$  et  $Z$  projectifs sur  $k$  et  $X$  projectif et lisse sur  $k$ . Soient  $[f : Y \rightarrow X] \in \text{Hom}_S(Y, X; g)(k)$ ,  $y \in Y$  et  $x = f(y)$ . On a

$$T_{Y \times \text{Hom}_S(Y, X; g), (y, [f])} = T_{Y, y} \oplus \mathbf{H}^0(Y, f^*T_X \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{I}_{Z/Y}) \xrightarrow{d_{(y, [f])}^{ev}} T_{X, x}$$

$$(t, s) \mapsto d_y f(t) + s(y).$$

*Démonstration.* — On doit bien sûr reprendre le calcul effectué un peu plus haut. Soit  $(t, s) \in T_{Y, y} \oplus \mathbf{H}^0(Y, f^*T_X \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{I}_{Z/Y}) = T_{Y \times_k \text{Hom}_S(Y, X; g), (y, [f])}$ . On note aussi  $t : \text{Spec}(k[\varepsilon]) \rightarrow Y$  et  $s : \text{Spec}(k[\varepsilon]) \rightarrow \text{Hom}_S(Y, X; g)$  les morphismes correspondants ; on note encore  $s$  l'application

$$s : Y \times_k \text{Spec}(k[\varepsilon]) \xrightarrow{\text{Id}_{Y \times_k s}} Y \times_k \text{Hom}_S(Y, X; g) \xrightarrow{ev} X.$$

On doit donc déterminer

$$\text{Spec}(k[\varepsilon]) \xrightarrow{t \times_k s} Y \times_k \text{Spec}(k[\varepsilon]) \xrightarrow{s} X$$

et l'élément de  $T_{X, x} \simeq (\mathfrak{m}_{\mathcal{O}_{X, x}} / \mathfrak{m}_{\mathcal{O}_{X, x}}^2)^*$  correspondant.

On reprend les notations introduites dans la démonstration de la proposition 2.8. On considère le morphisme « constant »

$$s_0 : Y \times_k \text{Spec}(k[\varepsilon]) \rightarrow Y \xrightarrow{f} X.$$

On pose  $h := (s_0, s) : Y \times_k \text{Spec}(k[\varepsilon]) \rightarrow X_1$ . On rappelle qu'on identifie (au moyen de la projection canonique sur le premier facteur)  $X_1$  au schéma  $\text{Spec}_X(\mathcal{O}_X \oplus \Omega_{X/k}^1)$  où le deuxième terme est considéré comme un idéal de carré nul. On déduit  $s : Y \times_k \text{Spec}(k[\varepsilon]) \rightarrow X$  de  $h$  en projetant sur le deuxième facteur. On a une deuxième structure de  $\mathcal{O}_X$ -algèbre sur  $\mathcal{O}_X \oplus \Omega_{X/k}^1$  via la différentielle  $d : \mathcal{O}_X \rightarrow \Omega_{X/k}^1$  qui correspond à la projection canonique de  $X_1 \subset X \times_k X$  sur le deuxième facteur. On rappelle enfin que, dans la construction précédente,  $h$  est déterminé par le morphisme d'algèbres

$$\mathcal{O}_{Y \times_k \text{Spec}(k[\varepsilon])} \oplus s_0^* \Omega_{X/k}^1 \xrightarrow{\text{Id}_{\mathcal{O}_{Y \times_k \text{Spec}(k[\varepsilon])}} + \varepsilon s} \mathcal{O}_{Y \times_k \text{Spec}(k[\varepsilon])}$$

où

$$s : s_0^* \Omega_{X/k}^1 \rightarrow (s_0^* \Omega_{X/k}^1)|_Y = f^* \Omega_{X/k}^1 \rightarrow \varepsilon \mathcal{I}_{Z/Y}.$$

On a donc

$$\mathfrak{m}_{\mathcal{O}_{X, x}} / \mathfrak{m}_{\mathcal{O}_{X, x}}^2 \xrightarrow{d_{(y, [f])}^{ev(-, s)}} \mathfrak{m}_{\mathcal{O}_{Y, y}} / \mathfrak{m}_{\mathcal{O}_{Y, y}}^2$$

$$\lambda \mapsto s_x(d_x \lambda) + f_x^* \lambda,$$

autrement dit, on a bien le résultat annoncé.  $\square$

### 3. Applications stables et leurs espaces de modules

**3.1. Espaces algébriques.** — On fixe un schéma  $S$  noethérien séparé. On rappelle que l'on note  $(\text{Sch}/S)$  la catégorie des  $S$ -schémas. La plupart des foncteurs contravariant  $F : (\text{Sch}/S) \rightarrow (\text{Ens})$  que l'on considère ne sont pas représentables ; les espaces algébriques permettent de contourner cette difficulté dans beaucoup de situations. On renvoie par exemple au texte de Knutson [Knu71] pour tout ce qui concerne les espaces algébriques. On donnera dans le paragraphe suivant certaines des propriétés importantes des espaces algébriques.

**3.2. Définitions.** — On fixe un corps  $k$  algébriquement clos. Soit  $X$  une  $k$ -variété. On a déjà rencontré le schéma  $\mathrm{Hom}(\mathbf{P}^1, X)$  qui paramètre (sous des hypothèses convenables sur  $X$ ) les morphismes  $\mathbf{P}^1 \rightarrow X$ . On montrera qu'il est suffisant pour beaucoup d'applications mais on montrera aussi que ce n'est pas toujours le cas. On s'intéresse parfois aux courbes rationnelles  $C \subset X$  et pas aux morphismes  $\mathbf{P}^1 \rightarrow X$  ou, ce qui revient au même, au quotient de  $\mathrm{Hom}(\mathbf{P}^1, X)$  par le groupe  $\mathrm{Aut}(\mathbf{P}^1)$ ; et enfin, même si ce dernier existe, il n'est en général pas propre (sur  $k$ ).

On introduit dans ce paragraphe les « espaces de modules » d'applications stables (d'après Kontsevich); c'est grosso modo une compactification modulaire du quotient  $\mathrm{Hom}(\mathbf{P}^1, X)/\mathrm{Aut}(\mathbf{P}^1)$  dont les « points » sont des classes d'isomorphie d'applications « stables »  $C \rightarrow X$  où  $C$  est une courbe nodale de genre (arithmétique) 0.

Il y a beaucoup de textes sur le sujet. On pourra consulter par exemple [KM94], [FP97], [AK03], [Par07], [BS08] et/ou [Bal08].

**Définition 3.1.** — Soient  $X$  une  $k$ -variété lisse projective,  $H$  un diviseur ample sur  $X$ ,  $g$  et  $d$  des entiers  $\geq 0$ . Soit  $T$  un  $k$ -schéma. Une courbe stable de genre  $g$  et degré  $d$  sur  $X$  paramétrée par  $T$  est la donnée d'un couple  $(\mathcal{C}, f)$  où  $\mathcal{C}$  est une courbe sur  $T$  (c'est-à-dire un morphisme propre et plat  $\mathcal{C} \rightarrow T$  de dimension relative 1) et  $f : \mathcal{C} \rightarrow X$  un morphisme tels que pour tout  $t \in T$

1.  $\mathcal{C}_{\bar{t}}$  soit une courbe nodale de genre arithmétique  $h^1(\mathcal{C}_{\bar{t}}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}_{\bar{t}}}) = g$  et de  $H$ -degré  $d$  et tels que
2.  $\mathcal{C}_{\bar{t}}$  n'ait qu'un nombre fini d'automorphismes qui commutent avec  $f_{\bar{t}}$ .

On dit que les courbes stables  $(\mathcal{C}, f)$  et  $(\mathcal{C}', f')$  sur  $X$  sont isomorphes s'il existe un  $T$ -isomorphisme  $\varphi : \mathcal{C} \simeq \mathcal{C}'$  tel que  $f' \circ \varphi = f$ . On utilisera également la notation  $(\mathcal{C}_T, f_T)$  pour  $(\mathcal{C}, f)$ .

**Remarque 3.2.** — On peut montrer que la condition 2. ci-dessus est équivalente aux conditions suivantes :

1. toute composante irréductible de  $\mathcal{C}_{\bar{t}}$  isomorphe à  $\mathbf{P}_{k(\bar{t})}^1$  contractée par  $f$  a au moins 3 points singuliers et
2. toute composante irréductible de  $\mathcal{C}_{\bar{t}}$  de genre (arithmétique) 1 contractée par  $f$  a au moins 1 point singulier.

On considère le foncteur contravariant

$$M_g(X; H, d) : (\mathrm{Sch}/k) \rightarrow (\mathrm{Ens})$$

où, pour tout  $k$ -schéma  $T$ ,  $M_g(X; H, d)(T)$  est l'ensemble des classes d'isomorphie de courbes stables de genre  $g$  et degré  $d$  sur  $X$  paramétrées par  $T$ , et pour morphisme de  $k$ -schémas  $T' \rightarrow T$ , l'application  $M_g(X; H, d)(T) \rightarrow M_g(X; H, d)(T')$  est l'application évidente;  $M_g(X; H, d)$  est un faisceau pour la topologie étale.

**Théorème 3.3.** — Soient  $X$  une  $k$ -variété lisse projective,  $H$  un diviseur ample sur  $X$ ,  $g$  et  $d$  des entiers  $\geq 0$ . Alors  $M_g(X; H, d)$  est un espace algébrique propre sur  $k$ .

On peut exprimer (et on démontre!) la propriété de l'espace algébrique  $M_g(X; H, d)$  au moyen du critère valuatif (voir [FP97, Proposition 5] et [FP97, Proposition 6]). Soit  $R$  un anneau de valuation discrète de corps des fractions  $K$  et de corps résiduel  $k$  et soit  $(C_K, f_K)$  une courbe stable (de genre  $g$  et degré  $d$ ) sur  $X$  paramétrée par  $\mathrm{Spec}(K)$ , alors :



- il existe au plus une extension de  $(C_K, f_K)$  à  $\text{Spec}(R)$  et,
- il existe une extension finie séparable  $K'$  de  $K$  et une extension de  $(C_K, f_K)$  à  $\text{Spec}(R')$  où  $R'$  est la normalisation de  $R$  dans  $K'$ .

On va maintenant donner deux conséquences importantes du théorème 3.3. Soit  $(C, f) \in M_g(X; H, d)(k)$ . On note  $D_{(C,f)}(X) : (\text{Art}/k) \rightarrow (\text{Ens})$  le foncteur covariant qui à tout objet  $A$  de  $(\text{Art}/k)$  associe l'ensemble des éléments de  $M_g(X; H, d)(\text{Spec}(A))$  qui sont envoyés sur  $(C, f) \in M_g(X; H, d)(k)$  par  $M_g(X; H, d)(\text{Spec}(A)) \rightarrow M_g(X; H, d)(\text{Spec}((A/\mathfrak{m}_A) = k))$ , ou encore, l'ensemble des classes d'isomorphie de courbes stables de genre  $g$  et degré  $d$  sur  $X$  paramétrées par  $\text{Spec}(A)$  dont la fibre au-dessus du point fermé est isomorphe à  $(C, f)$ . Le foncteur  $D_{(C,f)}(X)$  n'est pas pro-représentable en général. On montre quand même que

1. le foncteur  $D_{(C,f)}(X)$  a une enveloppe ([Sch68]), autrement dit, on montre qu'il existe une  $k$ -algèbre locale  $(R_{(C,f)}, \mathfrak{m}_{R_{(C,f)}})$  noethérienne, complète de corps résiduel  $k$  et  $\xi_{(C,f)} \in \varprojlim_i D_{(C,f)}(X)(R_{(C,f)}/\mathfrak{m}_{R_{(C,f)}}^i)$  tels que le morphisme de foncteurs  $h_{R_{(C,f)}} \rightarrow D_{(C,f)}$  induit par  $\xi_{(C,f)}$  soit lisse et induise une bijection de  $t_{R_{(C,f)}}$  sur  $t_{D_{(C,f)}(X)}$ , et on montre aussi que
2.  $\xi_{(C,f)}$  est algébrique, autrement dit, on montre qu'il existe une courbe stable de genre  $g$  et de degré  $d$  sur  $X$  paramétrée par  $\text{Spec}(R_{(C,f)})$  donnant  $\xi_{(C,f)}$  par

$$M_g(X; H, d)(\text{Spec}(R_{(C,f)})) \rightarrow M_g(X; H, d)(\text{Spec}(R_{(C,f)}/\mathfrak{m}_{R_{(C,f)}}^i)).$$

Soient  $F : (\text{Art}/k) \rightarrow (\text{Ens})$  et  $G : (\text{Art}/k) \rightarrow (\text{Ens})$  deux foncteurs. On rappelle qu'un morphisme  $F \rightarrow G$  est lisse si, c'est une définition, pour tout morphisme surjectif  $A' \twoheadrightarrow A$ , l'application induite  $F(A') \rightarrow F(A) \times_{G(A)} G(A')$  est surjective (voir le lemme 2.6).

On peut déterminer l'espace tangent  $t_{R_{(C,f)}}$  puis estimer la dimension de  $R_{(C,f)}$  de façon analogue à ce que nous avons fait au paragraphe 2.2.

**Exemple 3.4.** — On vérifie facilement que  $M_0(\mathbf{P}^r; \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(1), 1)(k)$  ( $r \geq 1$ ) est l'ensemble des droites de  $\mathbf{P}^r$ .

**Exemple 3.5.** — On peut montrer que  $M_0(\mathbf{P}^2; \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(1), 2)(k)$  s'identifie à l'ensemble des coniques complètes; si  $(C, f) \in M_0(\mathbf{P}^2, 2)(k)$  alors  $C$  est isomorphe

1. ou bien à une conique lisse plongée dans  $\mathbf{P}^2$ ,
2. ou bien à la réunion de deux droites distinctes plongées dans  $\mathbf{P}^2$ ,
3. ou bien à la réunion de deux « droites » distinctes et les deux composantes de  $C$  ont même image par  $f$  (cet ensemble est en bijection avec les couples formés d'une droite de  $\mathbf{P}^2$  et d'un point sur cette droite)
4. ou bien à une « droite » et  $f$  est de degré 2 sur son image (cet ensemble est en bijection avec les couples formés d'une droite de  $\mathbf{P}^2$  et de deux points distincts sur cette droite).

**3.3. Étude infinitésimale.** — On précise un peu les résultats du paragraphe précédent. Soit  $(C_k, f_k) \in M_g(X; H, d)(\text{Spec}(k))$ . On considère le complexe

$$\Omega_{f_k}^\bullet = [f_k^* \Omega_X^1 \rightarrow \Omega_{C_k}^1]$$

où le terme  $\Omega_{C_k}^1$  est en degré 0.

**Proposition 3.6.** — Soient  $X$  une  $k$ -variété lisse projective,  $H$  un diviseur ample sur  $X$ ,  $g$  et  $d$  des entiers  $\geq 0$ .

1. Soit  $(C_k, f_k) \in M_g(X; H, d)(\text{Spec}(k))$ . Les déformations au premier ordre de  $(C_k, f_k)$  sont paramétrées par

$$\text{Ext}_{C_k}^1(\Omega_{f_k}^\bullet, \mathcal{O}_{C_k}).$$

2. Soient  $T = \text{Spec}(A'/I) \subset T' = \text{Spec}(A')$  des  $k$ -schémas où  $A'$  est un anneau artinien local de corps résiduel  $k$  et  $\mathfrak{m}_{A'}I = 0$ . Soit  $(C_A, f_A) \in M_g(X; H, d)(\text{Spec}(A))$ . L'obstruction au relèvement de  $(C_A, f_A) \in M_g(X; H, d)(\text{Spec}(A))$  en  $(C_{A'}, f_{A'}) \in M_g(X; H, d)(\text{Spec}(A'))$  est un élément de

$$\text{Ext}_{C_k}^2(\Omega_{f_k}^\bullet, \mathcal{O}_{C_k}) \otimes_k I$$

Lorsque  $f_k$  n'est pas ramifié (en particulier, aucune des composantes de  $C_k$  n'est contractée par  $f_k$ ), le noyau de  $f_k^* \Omega_X^1 \rightarrow \Omega_{C_k}^1$  est localement libre ; son dual, le fibré normal, est noté  $N_{f_k}$  ou  $N_{C_k/X}$ . De plus, le complexe  $\Omega_{f_k}^\bullet$  est quasi-isomorphe au complexe  $N_{f_k}^*[-1]$  et le groupe  $\text{Ext}_{C_k}^i(\Omega_{f_k}^\bullet, \mathcal{O}_{C_k})$  est isomorphe à  $H^{i-1}(C_k, N_{f_k})$ .

Soit  $C_k$  une courbe projective réduite, localement intersection complète. On considère le foncteur

$$\text{Déf}_{C_k} : (\text{Art}/k) \rightarrow (\text{Ens})$$

où, pour toute  $k$ -algèbre  $(A, \mathfrak{m}_A)$  locale artinienne de corps résiduel  $k$ ,  $\text{Déf}_{C_k}(A)$  est l'ensemble des classes d'isomorphie de courbes  $C_A$  sur  $\text{Spec}(A)$  telles que la fibre au-dessus du point fermé de  $\text{Spec}(A)$  soit isomorphe à  $C_k$ . On admet ici (on renvoie à nouveau au texte [Ser06] lorsque le corps  $k$  est de caractéristique nulle) les résultats suivants :

1. le foncteur  $\text{Déf}_{C_k}$  a une enveloppe,
2. les déformations au premier ordre de  $C_k$  sont paramétrées par  $\text{Ext}_{C_k}^1(\Omega_{C_k}^1, \mathcal{O}_{C_k})$ ,
3. les déformations infinitésimales de  $C_k$  ne sont pas obstruées et enfin,
4. pour toute  $k$ -algèbre  $A'$  locale artinienne de corps résiduel  $k$ , tout idéal  $I$  de  $A'$  tel que  $\mathfrak{m}_{A'}I = 0$  et tout  $C_A \in \text{Déf}_{C_k}(A)$ , l'action naturelle de  $\text{Ext}_{C_k}^1(\Omega_{C_k}^1, \mathcal{O}_{C_k}) \otimes_k I$  sur l'ensemble des relèvements de  $C_A$  à  $A'$  est transitive.

Les points 1., 2. et 4. ne sont pas bien difficiles à démontrer mais le point 3. est plus délicat lorsque  $C_k$  est singulière. On va décrire d'une part l'application qui à un élément de  $\text{Ext}_{C_k}^1(\Omega_{C_k}^1, \mathcal{O}_{C_k})$  associe une déformation au premier ordre de  $C_k$  et d'autre part l'action de  $\text{Ext}_{C_k}^1(\Omega_{C_k}^1, \mathcal{O}_{C_k}) \otimes_k I$  sur l'ensemble des relèvements de  $C_A$  à  $A'$ .

Soit  $v \in \text{Ext}_{C_k}^1(\Omega_{C_k}^1, \mathcal{O}_{C_k})$ ; on a donc une extension

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{C_k} \xrightarrow{j} \mathcal{E} \rightarrow \Omega_{C_k}^1 \rightarrow 0.$$

On considère le faisceau de groupes abéliens

$$\mathcal{O}_{C_B} := \mathcal{E} \times_{\Omega_{C_k}^1} \mathcal{O}_{C_k}$$

où la flèche  $\mathcal{O}_{C_k} \rightarrow \Omega_{C_k}^1$  est la dérivation universelle ; on munit ce faisceau d'une structure d'anneau en posant, pour tout ouvert  $U$  de  $C_k$ , tout  $e, e' \in H^0(U, \mathcal{E}|_U)$  et tout  $f, f' \in H^0(U, \mathcal{O}_{C_k}|_U)$

$$(e, f) \cdot (e', f') = (f'e + fe, ff')$$

et enfin d'une structure de  $B$  algèbre, en posant,

$$t \cdot (e, f) = (j|_U(1_U), 0_U) \cdot (e, f) = (fj|_U(1_U), 0_U).$$

On pose maintenant  $C_B := \text{Spec}_{C_k}(\mathcal{O}_{C_B}) \in \text{Déf}_{C_k}(B)$ .

Soit  $v \otimes i \in \text{Ext}_{C_k}^1(\Omega_{C_k}^1, \mathcal{O}_{C_k}) \otimes_k I$ . Soit  $C_A \in \text{Déf}_{C_k}(A)$ . On pose  $B := k[t]/(t^2)$ . Soit  $C_B$  la déformation au premier ordre de  $C_k$  définie par  $v$ . On considère le morphisme d'anneaux

$$\begin{aligned} B \times_k A' &\rightarrow A' \\ (x + ty, a') &\mapsto a' + iy. \end{aligned}$$

On peut maintenant décrire l'action de  $v \otimes i$  sur  $C_A$  : c'est l'image de

$$C_B \sqcup_{C_k} C_A \in \text{Déf}_{C_k}(B \times_k A')$$

par l'application

$$\text{Déf}_{C_k}(B \times_k A') \rightarrow \text{Déf}_{C_k}(A').$$

*Démonstration de la proposition 3.6.* — On suppose, pour simplifier, que  $f_k$  n'est pas ramifié. On pose  $B := k[t]/(t^2)$ . Soit  $(C_B, f_B) \in M_g(X; H, d)(\text{Spec}(B))$  une déformation au premier ordre de  $(C_k, f_k)$ ; la différentielle de  $f_B$  donne un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & N_{C_k/C_B}^* \simeq \mathcal{O}_{C_k} & \longrightarrow & f_B^* \Omega_{X|C_k}^1 = f_k^* \Omega_X^1 & \longrightarrow & \Omega_{C_k}^1 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \exists ! & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & N_{f_k}^* & \longrightarrow & \Omega_{C_B|C_k}^1 & \longrightarrow & \Omega_{C_k}^1 \longrightarrow 0 \end{array}$$

On obtient ainsi un élément de  $H^0(C_k, N_{f_k})$ . Inversement, considérons  $t \in H^0(C_k, N_{f_k})$ ; son image  $u$  par le cobord

$$\text{Hom}_{C_k}(N_{f_k}^*, \mathcal{O}_{C_k}) \rightarrow \text{Ext}_{C_k}^1(\Omega_{C_k}^1, \mathcal{O}_{C_k})$$

définit une déformation au premier ordre  $C_B$  de  $C_k$ . L'image de  $u$  dans  $\text{Ext}_{C_k}^1(f_k^* \Omega_X^1, \mathcal{O}_{C_k}) = H^1(C_k, f_k^* T_X)$  étant nulle, on déduit du corollaire 2.10, qu'il existe un morphisme  $f_B : C_B \rightarrow X$  relevant  $f_k : C_k \rightarrow X$ . Ceci achève la démonstration de la première partie de la proposition.

Soient maintenant  $T = \text{Spec}(A'/I) \subset T' = \text{Spec}(A')$  des  $k$ -schémas où  $A'$  est un anneau artinien local de corps résiduel  $k$  et  $\mathfrak{m}_{A'} I = 0$  et  $(C_A, f_A) \in M_g(X; H, d)(\text{Spec}(A))$ . On considère un relèvement  $C_{A'}$  de  $C_A$  à  $A'$  quelconque. L'obstruction au relèvement de  $f_A : C_A \rightarrow X$  en  $f_{A'} : C_{A'} \rightarrow X$  est dans  $H^1(C_A, f_A^* T_X \otimes_{\mathcal{O}_A} I) = H^1(C_k, f_k^* T_X) \otimes_k I$  d'après le lemme 2.7 et la proposition 2.8; on note  $\alpha$  son image dans  $H^1(C_k, N_{f_k}) \otimes_k I$ . La classe  $\alpha$  ainsi obtenue ne dépend pas du choix de  $C_{A'}$  étendant  $C_A$  puisque l'action naturelle de  $\text{Ext}_{C_k}^1(\Omega_{C_k}^1, \mathcal{O}_{C_k}) \otimes_k I$  sur l'ensemble des relèvements de  $C_A$  à  $A'$  est transitive. Supposons  $\alpha = 0$  dans  $H^1(C_k, N_{f_k}) \otimes_k I$ , autrement dit, supposons que  $\alpha$  provienne de  $\beta \in \text{Ext}_{C_k}^1(\Omega_{C_k}^1, \mathcal{O}_{C_k}) \otimes_k I$ . On peut alors trouver un autre relèvement  $C'_{A'}$  de  $C_A$  de sorte que l'obstruction au relèvement de  $f_A : C_A \rightarrow X$  en  $f_{A'} : C'_{A'} \rightarrow X$  soit nulle. Ceci termine la démonstration de la proposition.  $\square$

On déduit le résultat suivant des lemmes 1.6 et 1.12 et de la proposition précédente.

**Théorème 3.7.** — *Soient  $X$  une  $k$ -variété lisse projective,  $g$  et  $d$  des entiers  $\geq 0$ . Soit  $(C_k, f_k) \in M_g(X; H, d)(\text{Spec}(k))$ . On suppose  $f_k$  non ramifié. Il existe alors un  $k$ -schéma  $U$ , un point fermé  $u \in U$  et une courbe stable de genre  $g$  et degré  $d$  sur  $X$  paramétrée par  $U$  telle que*

1.  $(C_u, f_u) \simeq (C_k, f_k)$ ,
2. l'espace tangent de Zariski à  $U$  au point  $u$  soit isomorphe à  $H^0(C_k, N_{f_k})$ ,
3.  $\dim_u U \geq \chi(C_k, N_{f_k}) = -K_X \cdot f_{k*} C_k + (\dim(X) - 3)(1 - g)$ .

Si  $h^1(C_k, N_{f_k}) = 0$ , alors  $U$  est lisse en  $u$  de dimension  $h^0(C_k, N_{f_k})$ .

## PARTIE II

### QUELQUES APPLICATIONS

#### 4. Lissage des arbres et peignes rationnels, d'après Kollár, Miyaoka et Mori

On fixe un corps  $k$  algébriquement clos. Toutes nos variétés et tous nos morphismes sont définis sur ce corps.

**4.1. Morphismes libres.** — Il s'agit de certains morphismes de  $\mathbf{P}^1$  dans une variété dont les déformations sont non-obstruées.

**Définition 4.1.** — Soient  $X$  une variété lisse et  $f : \mathbf{P}^1 \rightarrow X$  un morphisme ; on écrit  $f^*T_X \simeq \bigoplus_{i=1}^{\dim(X)} \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(a_i)$ . On dit que  $f$  est libre (resp. très libre) si les  $a_i$  sont tous positifs et que  $f$  n'est pas constant (resp. si les  $a_i$  sont tous strictement positifs).

**Exemple 4.2.** — Si  $\ell \simeq \mathbf{P}^1 \subset \mathbf{P}^n$  est une droite alors  $T_{\mathbf{P}^n|_\ell} \simeq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1)^{\oplus n-1}$  ; si  $\ell \simeq \mathbf{P}^1 \subset Q_n \subset \mathbf{P}^{n+1}$  est une droite contenue dans une quadrique lisse de dimension  $n$  alors  $T_{Q_n|_\ell} \simeq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1)^{\oplus n-2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}$ .

On caractérise facilement les morphismes libres.

**Proposition 4.3.** — Soient  $X$  une variété lisse projective et  $f : \mathbf{P}^1 \rightarrow X$  un morphisme.

1. Si  $f$  est libre,  $\text{Hom}(\mathbf{P}^1, X)$  est lisse en  $[f]$  et la différentielle du morphisme d'évaluation  $ev : \mathbf{P}^1 \times \text{Hom}(\mathbf{P}^1, X) \rightarrow X$  est surjective en tout point de  $\mathbf{P}^1 \times [f]$ .
2. Si la différentielle de  $ev$  est surjective en un point de  $\mathbf{P}^1 \times [f]$ , le morphisme  $f$  est libre ou constant.

*Démonstration.* — Si  $f$  est libre,  $H^1(\mathbf{P}^1, f^*T_X)$  est nul, et  $\text{Hom}(\mathbf{P}^1, X)$  est lisse en  $[f]$  d'après le théorème 2.11. On rappelle que (d'après la proposition 2.12) la différentielle du morphisme d'évaluation est donnée par

$$\begin{aligned} T_{\mathbf{P}^1 \times \text{Hom}(\mathbf{P}^1, X), (p, [f])} &= T_{\mathbf{P}^1, p} \oplus H^0(\mathbf{P}^1, f^*T_X) \xrightarrow{d_{(p, [f])} ev} T_{X, x} \\ (t, s) &\mapsto d_p f(t) + s(y) ; \end{aligned}$$

pour quelle soit surjective, il faut et il suffit que l'évaluation  $H^0(\mathbf{P}^1, f^*T_X) \rightarrow T_{X, x}$  le soit ou, ce qui est équivalent, que chaque  $a_i$  soit positif.  $\square$

On a montré que les déformations d'un morphisme libre passent par un point général de la variété, et qu'inversement, en caractéristique nulle, un élément d'une famille de courbes rationnelles qui domine la variété est libre.

**Définition 4.4.** — Soit  $X$  une variété de dimension  $n$ . On dit que  $X$  est uniréglée (resp. séparablement uniréglée) s'il existe une variété  $T$  de dimension  $n-1$  et une application rationnelle dominante (resp. séparable et dominante)  $\mathbf{P}^1 \times T \dashrightarrow X$ .

On note au passage qu'un point n'est pas une variété uniréglée. On déduit le résultat suivant de la proposition 4.3.

**Corollaire 4.5.** — Soit  $X$  une variété lisse projective. Alors  $X$  est séparablement uniréglée si et seulement s'il existe une courbe rationnelle libre sur  $X$ .

On montre de la même façon la proposition suivante.

**Proposition 4.6.** — Soient  $X$  une variété lisse projective et  $f : \mathbf{P}^1 \rightarrow X$  un morphisme.

1. Si  $f$  est très libre,  $\mathrm{Hom}(\mathbf{P}^1, X; f|_{\{0\}})$  est lisse en  $[f]$  et la différentielle du morphisme d'évaluation  $ev : \mathbf{P}^1 \times \mathrm{Hom}(\mathbf{P}^1, X; f|_{\{0\}}) \rightarrow X$  est surjective en  $(\infty, [f])$ . La différentielle de l'évaluation  $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \times \mathrm{Hom}(\mathbf{P}^1, X) \rightarrow X \times X$  est surjective en  $(0, \infty, [f])$ .
2. Si la différentielle de  $ev$  est surjective en un point de  $\mathbf{P}^1 \times [f]$ , le morphisme  $f$  est très libre.

**Définition 4.7.** — Soit  $X$  une variété. On dit que  $X$  est rationnellement connexe (resp. séparablement rationnellement connexe) s'il existe une variété  $T$  et un morphisme  $e : \mathbf{P}^1 \times T \rightarrow X$  tel que

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \times T &\rightarrow X \times X \\ (p, p', t) &\mapsto (e(p, t), e(p', t)) \end{aligned}$$

soit un morphisme dominant (resp. séparable et dominant).

On obtient également l'énoncé suivant.

**Corollaire 4.8.** — Soit  $X$  une variété lisse projective. Alors  $X$  est séparablement rationnellement connexe si et seulement s'il existe une courbe rationnelle très libre sur  $X$ .

**Exemple 4.9** ([Deb01]). — On suppose ici le corps  $k$  de caractéristique  $p > 0$ . On considère l'hypersurface de Fermat  $X_N^d$  de degré  $d = p^r + 1$  ( $r > 0$ ) donnée par l'équation

$$x_0^d + \cdots + x_N^d = 0$$

dans  $\mathbf{P}^N$ . Si  $N \geq 3$  alors  $X_N^d$  est unirationnelle, *i.e.*, il existe une application rationnelle dominante  $\mathbf{P}^{N-1} \dashrightarrow X_N^d$ ;  $X_N^d$  est en particulier rationnellement connexe. Si  $d \geq N + 1$  alors  $K_{X_N^d}$  est ample et  $X_N^d$  n'est donc pas séparablement rationnellement connexe.

**4.2. Lissage des arbres rationnels.** — On étudie dans ce paragraphe le problème suivant.

**Définition 4.10.** — Soient  $C$  une  $k$ -courbe projective connexe de composantes irréductibles rationnelles,  $X$  une  $k$ -variété lisse projective et  $p_1, \dots, p_r$  des points de  $C$ . On dit qu'un morphisme  $f : C \rightarrow X$  est lissable en fixant  $f(p_1), \dots, f(p_r)$  s'il existe une courbe lisse connexe pointée  $(T, o)$ , une courbe projective plate  $\mathcal{C} \rightarrow T$  dont les fibres sont toutes isomorphes à  $\mathbf{P}^1$  sauf éventuellement  $\mathcal{C}_o$ , un morphisme  $F : \mathcal{C} \rightarrow X$  qui coïncide avec  $f$  sur  $C$  et des sections  $s_i : T \rightarrow \mathcal{C}$  telles que  $F(s_i(T)) = f(p_i)$  pour tout  $i \in \{1, \dots, r\}$ . On dit que  $\mathcal{C} \rightarrow T$  est un lissage de  $C$ .

On commence par le cas des arbres rationnels.

**Définition 4.11.** — On appelle arbre rationnel une courbe projective connexe  $C$  de composantes irréductibles rationnelles  $C_1, \dots, C_m$ , que l'on peut numéroter de façon que chaque  $C_{i+1}$  ( $i \in \{1, \dots, m-1\}$ ) rencontre  $C_1 \cup \cdots \cup C_i$  en un seul point, qui est un point double ordinaire de  $C$ .

On montre sans peine que  $H^1(C, \mathcal{O}_C)$  est nul si  $C$  est arbre rationnel. On peut facilement construire un lissage  $\mathcal{C} \rightarrow T$  d'un arbre rationnel  $C$  donné mais un morphisme  $C \rightarrow X$  n'est en général pas lissable : si  $S$  et  $S'$  sont deux surfaces lisses,  $c : S' \rightarrow S$  est un morphisme birationnel et  $C$  est une composante connexe du lieu exceptionnel de  $c$  ayant au moins deux composantes irréductibles alors on montre à l'aide du lemme de rigidité (voir lemme 6.2) que l'inclusion  $C \subset S'$  n'est pas lissable.

**Proposition 4.12.** — *Soient  $X$  une variété lisse projective,  $C = C_1 \cup \dots \cup C_m$  un arbre rationnel et  $f : C \rightarrow X$  un morphisme.*

1. *On fixe un point  $p$  lisse sur  $C$ . Si la restriction de  $f$  à chaque  $C_i$  est libre, le morphisme  $f$  est lissable en une courbe rationnelle libre, en laissant  $f(p)$  fixe.*
2. *On fixe sur chaque  $C_i$  un point  $p_i$  lisse de  $C$ . Si la restriction de  $f$  à chaque  $C_i$  est très libre, le morphisme  $f$  est lissable en une courbe rationnelle très libre, en laissant les  $f(p_i)$  fixes.*

*Démonstration.* — On commence par démontrer la première assertion. Soit  $\pi : \mathcal{C} \rightarrow T$  un lissage de  $C$  avec une section  $s$  passant par  $p$ ; on note  $g : s(T) \rightarrow X \times T$  le morphisme  $(f(p), \pi)$ . Supposons avoir montré que  $H^1(C, f^*T_X(-p))$  est nul. On sait d'après le théorème 2.11 que le schéma  $\text{Hom}_T(\mathcal{C}, X \times T; g)$  est lisse sur  $T$  en  $[f]$  : il existe donc une courbe lisse  $T' \rightarrow \text{Hom}_T(\mathcal{C}, X \times T; g)$  passant par  $[f]$  et dominant  $T$ , ce qui prouve l'existence d'un lissage de  $f$ . On déduit des théorèmes de semi-continuité des dimensions des groupes de cohomologie que  $H^1(\mathcal{C}_{t'}, f'^*T_X(-p'))$  est nul pour  $t' \in T'$  « proche » de  $[f]$  où  $p' = s(t')$  et  $f' : \mathcal{C}_{t'} \rightarrow X$  est le morphisme correspondant à  $t' \in \text{Hom}_T(\mathcal{C}, X \times T; g)$ ; autrement dit,  $f'$  est un morphisme libre. Il suffit donc de vérifier que  $H^1(C, f^*T_X(-p))$  est nul. On le démontre par récurrence sur  $m$ . C'est facile si  $m = 1$ , supposons  $m \geq 2$ . On pose  $C' := C_1 \cup \dots \cup C_{m-1}$ ,  $q := C' \cap C_m$ . On peut toujours supposer  $p \in C_m$  quitte à échanger les rôles de  $C'$  et  $C_m$ . On a alors une suite exacte courte

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{C'}(-q) \rightarrow \mathcal{O}_C(-p) \rightarrow \mathcal{O}_{C_m}(-p) \rightarrow 0$$

et une suite exacte en cohomologie

$$H^1(C', f_{C'}^*T_X(-q)) \rightarrow H^1(C, f^*T_X(-p)) \rightarrow H^1(C_m, f_{C_m}^*T_X(-p)) ;$$

$H^1(C', f_{C'}^*T_X(-q))$  est nul par hypothèse de récurrence et  $H^1(C_m, f_{C_m}^*T_X(-p))$  l'est puisque la restriction de  $f$  à  $C_m$  est libre. On obtient l'annulation annoncée.

La démonstration de la deuxième assertion est analogue, une fois que l'on a vérifié que  $H^1(C, f^*T_X(-p_1 \dots - p_m))$  est nul.  $\square$

**4.2.1. Lissage des peignes.** — On étudie maintenant le cas des peignes rationnels. On ne suppose plus que la restriction du morphisme à la poignée est libre.

**Définition 4.13.** — Un peigne rationnel  $C$  est un arbre de  $m + 1$  courbes rationnelles lisses, avec une composante distinguée  $D$  (la poignée) et  $m$  dents  $C_1, \dots, C_m$  deux à deux disjointes, chaque dent  $C_i$  rencontrant  $D$  transversalement en un unique point  $q_i := D \cap C_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

**Proposition 4.14.** — *Soient  $C$  un peigne rationnel à  $m$  dents,  $p_1, \dots, p_r$  des points de sa poignée  $D$  lisse sur  $C$ . Soient  $X$  une variété lisse projective et  $f : C \rightarrow X$  un morphisme dont la restriction à chaque dent de  $C$  est libre. Il existe un entier  $m'$  vérifiant*

$$m' \geq m - K_X \cdot f_*D - (r - 1) \dim X - \dim_{[f|_D]} \text{Hom}(D, X; f_{\{p_1, \dots, p_r\}})$$

et un sous-peigne  $C'$  de  $C$  à  $m'$  dents tels que  $f|_{C'}$  soit lissable en laissant les  $f(p_i)$  fixes.

*Démonstration.* — On peut toujours supposer

$$m - K_X \cdot f_* D - (r - 1) \dim X - \dim_{[f|_D]} \mathrm{Hom}(D, X; f|_{\{p_1, \dots, p_r\}}) > 0$$

sinon  $m' = 0$  et  $C' = D$  conviennent.

**Étape 1.**—On commence par construire un lissage « universel » de  $C$ . Soit  $\mathcal{C}_m \rightarrow D \times \mathbf{A}^m$  l'éclatement de  $D \times \mathbf{A}^m$  le long des  $m$  sous-variétés disjointes  $\{q_i\} \times \{y_i = 0\}$  de codimension 2 dans  $D \times \mathbf{A}^m$  où les  $y_i$  sont des coordonnées sur  $\mathbf{A}^m$ . Soit  $\pi : \mathcal{C}_m \rightarrow \mathbf{A}^m$  la projection induite. La fibre au-dessus de  $0 \in \mathbf{A}^m$  est le peigne  $C$  et, plus généralement, la fibre de  $\pi$  au-dessus de  $y \in \mathbf{A}^m$  est un peigne de poignée  $D$  dont le nombre de dents est égal au nombre des coordonnées  $y_i$  nulles en  $y$ . On note également que le morphisme  $\pi$  est projectif et plat (voir [Har77, Theorem 9.9]). On a aussi  $r$  sections  $s_i : \mathbf{A}^m \rightarrow \mathcal{C}_m$  de  $\pi$  telles que  $s_i(0) = p_i \in D \subset C = \pi^{-1}(0)$ . Soit  $V_{m'} := \{y \in \mathbf{A}^m \mid y_1 = \dots = y_{m'} = 0\}$  pour  $1 \leq m' < m$ ;  $\pi^{-1}(V_{m'})$  est la réunion de  $\mathcal{C}_{m'}$  et de  $m - m'$  copies disjointes de  $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{A}^{m'}$ .

**Étape 2.**—On note  $g : \cup_{i=1}^r s_i(\mathbf{A}^m) \rightarrow X \times \mathbf{A}^m$  le morphisme  $s_i(y) \mapsto (f(p_i), y)$ . On considère le  $\mathbf{A}^m$ -schéma  $\rho : \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}^m}(\mathcal{C}_m, X \times \mathbf{A}^m; g) \rightarrow \mathbf{A}^m$ . On montre l'inégalité

$$\dim_{[f]} \mathrm{Hom}(C, X; f|_{\{p_1, \dots, p_r\}}) < \dim_{[f]} \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}^m}(\mathcal{C}_m, X \times \mathbf{A}^m; g)$$

de la façon suivante. On sait, d'après le théorème 2.11, que le membre de gauche est minoré par

$$-K_X \cdot f_* C + (1 - r) \dim X + m.$$

On remarque ensuite que la fibre du morphisme de restriction

$$\mathrm{Hom}(C, X; f|_{\{p_1, \dots, p_r\}}) \rightarrow \mathrm{Hom}(D, X; f|_{\{p_1, \dots, p_r\}})$$

en  $[f|_D]$  est  $\prod_{i=1}^m \mathrm{Hom}(C_i, X; f|_{\{q_i\}})$ . On a donc

$$\begin{aligned} & \dim_{[f]} \mathrm{Hom}(C, X; f|_{\{p_1, \dots, p_r\}}) \\ & \leq \dim_{[f|_D]} \mathrm{Hom}(D, X; f|_{\{p_1, \dots, p_r\}}) + \sum_{i=1}^m \dim_{[f|_{C_i}]} \mathrm{Hom}(C_i, X; f|_{\{q_i\}}) \\ & \leq \dim_{[f|_D]} \mathrm{Hom}(D, X; f|_{\{p_1, \dots, p_r\}}) + \sum_{i=1}^m -K_X \cdot f_* C_i \quad (\text{car } f|_{C_i} \text{ est un morphisme libre}) \\ & < m - K_X \cdot f_* C - (r - 1) \dim X \quad (\text{d'après l'hypothèse}). \end{aligned}$$

On en déduit qu'il existe une courbe lisse  $T \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}^m}(\mathcal{C}_m, X \times \mathbf{A}^m; g)$  passant par  $[f]$  qui n'est pas contractée par  $\rho$  et un  $T$ -morphisme  $\mathcal{C}_m \times_{\mathbf{A}^m} T \rightarrow X \times T$ . On peut toujours supposer que  $\{m' + 1, \dots, m\}$  est l'ensemble des indices  $i$  tels que la coordonnée  $y_i$  soit nulle sur l'image de  $T$  dans  $\mathbf{A}^m$ . On sait alors, par construction de  $\mathcal{C}_m \rightarrow \mathbf{A}^m$ , que  $\mathcal{C}_m \times_{\mathbf{A}^m} T$  est la réunion de  $\mathcal{C}_{m'} \times_{\mathbf{A}^{m'}} T$  et de composantes isomorphes à  $\mathbf{P}^1 \times T$  : une fibre générale de  $\mathcal{C}_{m'} \times_{\mathbf{A}^{m'}} T \rightarrow T$  est un sous-peigne  $C'$  de  $C$  à  $m'$  dents attachées en les points  $q_i$  pour  $1 \leq i \leq m'$  et  $f|_{C'}$  est lissable en laissant  $f(p_1), \dots, f(p_r)$  fixes.  $\square$

On appelle chaîne rationnelle une courbe connexe de  $X$  dont toutes les composantes irréductibles sont rationnelles.

**Définition 4.15.** — Soit  $X$  une variété définie sur un corps algébriquement clos non dénombrable. On dit que  $X$  est rationnellement connexe par chaînes si deux points très généraux peuvent être reliés par une chaîne rationnelle.

On peut montrer en utilisant en particulier les deux propositions précédentes (mais c'est plus difficile) l'énoncé suivant (voir également [Deb01] et [Bon08]).

**Théorème 4.16** ([KMM92b]). — Soient  $X$  une variété lisse projective définie sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle et  $H$  un diviseur ample sur  $X$  tel que  $H - K_X$  soit numériquement effectif. On suppose qu'il existe  $d \in \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$  tel que deux points quelconques de  $X$  puissent être reliés par une chaîne rationnelle de  $H$ -degré au plus  $d$ . Alors, deux points quelconques de  $X$  peuvent être reliés par une courbe rationnelle (irréductible) très libre de  $H$ -degré au plus  $2d(\dim(X) + d + 3)^d$ .

## 5. Lissage des peignes, d'après Graber, Harris et Starr

On s'intéresse à nouveau au problème du lissage des peignes rationnels ; on va donner des conditions pour que les déformations d'un peigne (rationnel) ou plus exactement de l'application stable correspondante ne soient pas obstruées, d'après [GHS03] (voir également [AK03, Theorem 27] et [Deb03]).

Soient  $X$  une variété lisse projective,  $D$  une courbe lisse et connexe et  $g : D \rightarrow X$  un morphisme non ramifié. On suppose qu'il existe une courbe très libre  $L \rightarrow X$  rencontrant  $g(D)$ . On choisit des points généraux  $p_1, \dots, p_m$  sur  $g(D)$  et, pour chaque  $i$ , une courbe rationnelle très libre non ramifiée  $L_i \rightarrow X$  passant par  $g(p_i)$ , à direction tangente générale en  $p_i$ . On forme le peigne  $C_m = D \cup L_1 \cup \dots \cup L_m$  muni d'un morphisme  $f_m : C_m \rightarrow X$  non ramifié.

**Proposition 5.1.** — Sous les hypothèses et les notations précédentes, pour  $m \gg 0$ ,  $f_m : C_m \rightarrow X$  se déforme en  $f'_m : C'_m \rightarrow X$ , où  $C'_m$  est une courbe projective et lisse qui vérifie  $h^1(C'_m, N_{f'_m}) = 0$ .

*Démonstration.* — **Étape 1**—Il existe un entier  $m_1$  tel que, pour tout  $m \geq m_1$  et tout  $p \in D$ , on ait  $h^1(D, N_{f_m|D}(-p)) = 0$ .

On a un diagramme commutatif de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & N_g(-p) & \longrightarrow & N_{f_m|D}(-p) & \longrightarrow & \bigoplus_{i=1}^m T_{L_i, p_i} \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & N_g(-p) & \longrightarrow & N_g(-p + P_m) & \longrightarrow & \bigoplus_{i=1}^m N_{g, p_i} \longrightarrow 0. \end{array}$$

Il existe un entier  $m_0$  tel que, pour tout  $m \geq m_0$ , on ait l'annulation de  $H^1(D, N_g(-p + P_m))$  pour tout  $p \in D$ , de sorte que le cobord

$$\bigoplus_{i=1}^m N_{g, p_i} \rightarrow H^1(D, N_g(-p))$$

est surjectif. On pose  $h := h^1(D, N_g(-p))$ . On fixe  $p_0 \in D$ . On en déduit que, posant  $m_1 = \max(m_0, h)$ , l'application

$$\bigoplus_{i=1}^{m_1} T_{L_i, p_i} \rightarrow H^1(D, N_g(-p_0))$$



est surjective puisque les points  $p_i$  et les directions  $T_{L_i, p_i}$  sont générales. On a donc  $h^1(D, N_{f_{m_1}|_D}(-p_0)) = 0$  et  $h^1(D, N_{f_{m_1}|_D}(-p)) = 0$  pour tout  $p \in D$  sauf éventuellement pour un nombre fini de points de  $D$ . On répète l'argument précédent et on obtient finalement l'annulation de  $H^1(D, N_{f_{m_1}|_D}(-p)) = 0$  pour tout  $p \in D$ .

La suite exacte

$$0 \rightarrow N_{f_{m_1}} \rightarrow N_{f_{m_1+1}|_{C_{m_1}}} \rightarrow T_{L_{m_1+1}, p_{m_1+1}} \rightarrow 0$$

donne l'annulation de  $H^1(D, N_{f_{m_1+1}|_D}(-p)) = 0$  pour tout  $p \in D$ ; on conclut par récurrence sur  $m \geq m_1$ .

**Étape 2.**—On en déduit que pour tout  $m \geq m_1$

1.  $N_{f_m}$  est engendré par ses sections globales et,
2.  $h^1(C, N_{f_m}) = 0$

de la façon suivante.

On déduit immédiatement du résultat d emontr e plus haut que le fibré  $N_{f_m|_D}$  est engendré par ses sections globales pour tout  $m \geq m_1$ . Notons  $L_m$  la réunion (disjointe) des  $L_i$  et  $P_m$  le diviseur  $p_1 + \dots + p_m$ . On note aussi  $h_m : L_m \rightarrow X$  la restriction de  $f_m$  à  $L_m$ .; on a une suite exacte

$$0 \rightarrow N_{h_m} \rightarrow N_{f_m|_{L_m}} \rightarrow \bigoplus_{i=1}^m T_{D, p_i} \rightarrow 0.$$

Comme  $L_i \rightarrow X$  est très libre, on en déduit que  $N_{h_m}(-P_m)$  est engendré par ses sections globales et l'annulation de  $H^1(L_m, N_{h_m}(-P_m))$ . On en déduit donc, grâce à la suite exacte précédente tensorisée par  $\mathcal{O}_{L_m}(-P_m)$ , que le fibré  $N_{f_m|_{L_m}}(-P_m)$  est engendré par ses sections globales et l'annulation de  $H^1(L_m, N_{f_m|_{L_m}}(-P_m))$ . On considère pour conclure la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{L_m}(-P_m) \rightarrow \mathcal{O}_{C_m} \rightarrow \mathcal{O}_D \rightarrow 0$$

tensorisée par  $N_{f_m}$ .

**Étape 3.**—Considérons la suite exacte

$$0 \rightarrow N_g \rightarrow N_{f_m|_D} \rightarrow \bigoplus_{i=1}^m T_{L_i, p_i} \rightarrow 0.$$

La déformation au premier ordre de  $(C_m, f_m)$  correspondant à un élément de  $H^0(C_m, N_{f_m})$  lisse le point double  $p_i$  de  $C_m$  si et seulement si son image dans  $T_{L_i, p_i}$  n'est pas nulle; cette condition est satisfaite par une section générale de  $H^0(C_m, N_{f_m})$  puisque  $N_{f_m}$  est engendré par ses sections globales. Une déformation générale au premier ordre de  $f_m : C_m \rightarrow X$  est lisse et non-obstruée puisque  $h^1(C_m, N_{f_m}) = 0$ . On déduit la première partie du résultat annonc e du théorème 3.7 et la seconde des théorèmes de semi-continuité des dimensions des groupes de cohomologie. □

On retrouve (presque) un résultat d'Hartshorne et Hirschowitz.

**Théorème 5.2** ([HH85, Corollary 4.3]). — Soient  $D \subset \mathbf{P}^3$  une courbe lisse et connexe et

$$X = D \cup L_1 \cup \dots \cup L_m$$

un peigne de poignée  $D$  dont les dents  $L_i$  sont des droites. Si  $m \geq h^1(D, N_{D/\mathbf{P}^3}) + 1$  alors  $X$  est lissable.

## 6. « Bend-and-Break Lemmas »

On fixe un corps algébriquement clos  $k$ . Toutes nos variétés et tous nos morphismes sont définis sur ce corps.

On appelle « Bend-and-Break Lemma » un énoncé du type suivant.

**Proposition 6.1** ([Mor79] et [MM86]). — Soient  $X$  une variété lisse projective et  $H$  un diviseur numériquement effectif sur  $X$ . Soient  $f : C \rightarrow X$  une courbe lisse et  $Z$  un sous-ensemble fini  $C$ , de cardinal  $\ell(Z) > 0$ . On suppose

$$-K_X \cdot f_*C + (1 - g(C) - \ell(Z)) \dim(X) \geq 1.$$

Il existe une courbe rationnelle  $\Gamma$  sur  $X$  rencontrant  $f(Z)$  vérifiant

$$H \cdot \Gamma \leq 2 \frac{H \cdot f_*C}{\ell(Z)}.$$

On rappelle un énoncé du « lemme de rigidité ».

**Lemme 6.2** ([MFK94, Proposition 6.1]). — Soient  $S$  un schéma noethérien connexe,  $p : Y \rightarrow S$  et  $q : X \rightarrow S$  des  $S$ -schémas et  $f : Y \rightarrow X$  un  $S$ -morphisme. On suppose  $p$  propre et plat et, pour tout  $s \in S$ ,  $H^0(X_s, \mathcal{O}_{X_s}) \simeq k(s)$ . Si, pour un point  $s \in S$ ,  $f(Y_s)$  est ensemblistement un point, alors il existe une section  $\eta : S \rightarrow Y$  telle que  $f = \eta \circ p$ .

*Démonstration de la proposition 6.1.* — On va démontrer l'existence d'une courbe rationnelle  $\Gamma$  sur  $X$  rencontrant  $f(Z)$ . On renvoie à [Deb01, Proposition 3.5] pour le « calcul » du nombre d'intersection  $H \cdot \Gamma$ .

Il suffit de traiter le cas où  $Z$  est un point (fermé)  $c$  de  $C$ . On a, d'après le théorème 2.11 et l'hypothèse,

$$\dim_{[f]} \mathrm{Hom}(C, X; f|_{\{c\}}) \geq 1.$$

Soient  $T \rightarrow \mathrm{Hom}(C, X; f|_{\{c\}})$  une courbe lisse passant par  $[f]$  et  $\bar{T}$  une compactification lisse de  $T$ . L'application rationnelle

$$ev : C \times \bar{T} \dashrightarrow X$$

n'est pas définie en au moins un point de  $\{c\} \times \bar{T}$  : sinon, on aurait  $f_t = f_{t'}$  pour tout  $t, t' \in T$  d'après le lemme de rigidité, ce qui est absurde puisque l'image de  $T$  dans  $\mathrm{Hom}(C, X; f|_{\{c\}})$  est une courbe.

On peut éliminer les points d'indétermination de l'application rationnelle  $ev$  en éclatant successivement des points de  $C \times \bar{T}$ . On obtient un morphisme

$$e : S \xrightarrow{\varepsilon} C \times \bar{T} \xrightarrow{ev} X$$

où  $\varepsilon$  est un morphisme birationnel qui n'est pas un isomorphisme. On considère un point  $t_0 \in \bar{T}$  tel que l'application rationnelle  $ev$  ne soit pas définie en  $(c, t_0)$ . La fibre de la projection  $S \rightarrow \bar{T}$  est la réunion du transformé strict de  $C \times \{t_0\}$  et d'un 1-cycle rationnel  $E$  qui n'est pas entièrement contracté par  $e$  et rencontre le transformé strict de  $\{c\} \times \bar{T}$  : le 1-cycle rationnel  $e_*E$  n'est donc pas nul et son support contient le point  $f(c)$ .  $\square$

**Remarque 6.3.** — On peut bien sûr remplacer l'hypothèse  $-K_X \cdot f_*C + (1 - g(C) - \ell(Z)) \dim(X) \geq 1$  par la condition  $\dim_{[f]} \mathrm{Hom}(C, X; f|_Z) \geq 1$ .

La proposition suivante complète naturellement la précédente.

**Proposition 6.4** ([Mor79]). — Soient  $X$  une variété lisse projective et  $f : \mathbf{P}^1 \rightarrow X$  une courbe rationnelle. Si

$$-K_X \cdot f_* \mathbf{P}^1 \geq \dim(X) + 2$$

alors le 1-cycle est numériquement équivalent à un 1-cycle effectif rationnel ou bien réductible ou bien non réduit passant par  $f(0)$  et  $f(\infty)$ .

*Démonstration.* — On a, d'après le théorème 2.11 et l'hypothèse,  $\dim_{[f]} \mathrm{Hom}(\mathbf{P}^1, X; f|_{\{0, \infty\}}) \geq 2$ . Le groupe des automorphismes de  $\mathbf{P}^1$  fixant 2 points est le groupe multiplicatif  $\mathbf{G}_m$  de dimension 1. Soient  $T \rightarrow \mathrm{Hom}(\mathbf{P}^1, X; f|_{\{0, \infty\}})$  une courbe lisse passant par  $[f]$  mais ne contenant pas l'orbite de  $[f]$  sous  $\mathbf{G}_m$  et  $\bar{T}$  une compactification lisse de  $T$ ; l'image de l'application rationnelle

$$ev : \mathbf{P}^1 \times \bar{T} \dashrightarrow X$$

est une surface. Soit  $S \rightarrow X \times \bar{T}$  la normalisée de l'adhérence de l'image du morphisme  $\mathbf{P}^1 \times T \rightarrow X \times T \subset X \times \bar{T}$ . On note  $\pi : S \rightarrow \bar{T}$  et  $e : S \rightarrow X$  les projections;  $\pi$  est plat et ses fibres générales sont isomorphes à  $\mathbf{P}^1$ . On peut toujours supposer le 1-cycle  $f_* \mathbf{P}^1$  réduit de sorte qu'il existe  $t \in T$  tel que  $f_* \mathbf{P}^1 = e_* S_t$ . Il suffit de montrer, compte tenu du lemme 6.6, que l'une des fibres de  $\pi$  est ou bien non réduite ou bien non irréductible. Supposons que toutes les fibres de  $\pi$  soient intègres; on déduit alors de [Har77, Chap. III Theorem 9.9] que les fibres de  $\pi$  sont toutes isomorphes à  $\mathbf{P}^1$ , autrement dit, que  $S \rightarrow \bar{T}$  est une surface géométriquement réglée. On note  $T_0$  (resp.  $T_\infty$ ) l'adhérence de  $\{0\} \times T$  (resp.  $\{\infty\} \times T$ ) dans  $S$ . On a  $e(T_0) = f(0)$  et  $e(T_\infty) = f(\infty)$  par construction. On en déduit que  $T_0^2 < 0$  et  $T_\infty^2 < 0$  puisque  $e$  est génériquement fini sur son image. On sait aussi que  $T_0 - T_\infty$  linéairement équivalent à un diviseur dont le support est réunion de fibres de  $\pi$  ([Har77, Chap. V Proposition 2.3]). On a donc

$$0 = (T_0 - T_\infty)^2 = T_0^2 + T_\infty^2 - 2T_0 \cdot T_\infty < 0.$$

On obtient la contradiction cherchée.  $\square$

**Remarque 6.5.** — On a encore la même conclusion si on remplace l'hypothèse  $-K_X \cdot f_* \mathbf{P}^1 \geq \dim(X) + 2$  par la condition  $\dim_{[f]} \mathrm{Hom}(\mathbf{P}^1, X; f|_{\{0, \infty\}}) \geq 2$ .

**Lemme 6.6.** — Soit  $S$  une surface normale et  $\pi : S \rightarrow T$  un morphisme sur une courbe lisse  $T$ , à fibres connexes. Si l'une des fibres de  $\pi$  est isomorphe à  $\mathbf{P}^1$  alors toute composante irréductible d'une fibre de  $\pi$  est rationnelle (éventuellement singulière).

*Démonstration.* — On déduit des théorèmes de semi-continuité des dimensions des groupes de cohomologie que pour  $t' \in T$  « proche » de  $t$ ,  $\pi^{-1}(t')$  est une courbe rationnelle. Quitte à remplacer  $T$  par un revêtement  $T'$  de  $T$  convenable on peut toujours supposer que  $S_{k(T)} \simeq \mathbf{P}_{k(T)}^1$ . On obtient donc une application rationnelle  $T \times \mathbf{P}^1 \dashrightarrow S$  dominante de  $T$ -variétés. On élimine ses points d'indétermination en éclatant successivement des points réguliers de  $T \times \mathbf{P}^1$ . On obtient finalement un  $T$ -morphisme  $S' \rightarrow S$  où  $S'$  est une surface lisse et où toutes les composantes des fibres de  $S' \rightarrow T$  sont rationnelles. On conclut facilement.  $\square$

**Théorème 6.7** ([MM86]). — Soient  $X$  une variété lisse projective,  $H$  un diviseur ample sur  $X$  et  $f : C \rightarrow X$  une courbe lisse telle que  $-K_X \cdot C < 0$ . Soit  $x \in f(C)$ . Il existe une courbe rationnelle  $\Gamma$  sur  $X$  passant par  $x$  avec

$$H \cdot \Gamma \leq 2 \dim(X) \frac{H \cdot C}{-K_X \cdot C}.$$

*Démonstration.* — **Étape 1.** — On suppose  $k$  de caractéristique  $p > 0$ . On considère le morphisme de Frobenius relatif  $C_1 \rightarrow C$ ; c'est un  $k$ -morphisme de degré  $p$  et on a bien sûr  $g(C_1) = g(C)$ . On obtient en itérant  $m$ -fois le Frobenius relatif et en composant avec  $f$  un morphisme  $f_m : C_m \rightarrow X$  de degré  $p^m \deg(f)$  sur son image. Soit  $Z_m \subset C_m$  un sous-schéma fermé de longueur finie  $z_m := [\frac{-p^m K_X \cdot C}{\dim(X)} - g(C)]$ . On a, d'après le théorème 2.11, l'inégalité

$$\dim_{[f_m]} \text{Hom}(C_m, X; f_m|_{Z_m}) \geq -p^m K_X \cdot C + (1 - g(C) - z_m) \dim(X) > 0.$$

On déduit de la proposition 6.1 qu'il existe une courbe rationnelle  $\Gamma_m$  passant par l'un des points de  $f(Z_m)$  avec

$$H \cdot \Gamma_m \leq 2 \frac{H \cdot f_{m*} C_m}{z_m} = 2 \frac{p^m}{z_m} H \cdot f_* C.$$

On a aussi

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{p^m}{z_m} = \frac{\dim(X)}{-K_X \cdot f_* C}$$

et donc, pour  $m \gg 0$ , on a

$$H \cdot \Gamma_m \leq 2 \frac{\dim(X)}{-K_X \cdot f_* C} H \cdot f_* C$$

puisque  $H \cdot \Gamma_m$  est un entier. On sait enfin d'après le lemme suivant que l'ensemble des points de  $C$  par lesquels passe une courbe rationnelle de degré  $\leq 2 \frac{\dim(X)}{-K_X \cdot f_* C} H \cdot f_* C$  est fermé; il coïncide donc avec  $C$  puisqu'on peut toujours ci-dessus choisir les points de  $Z_m$  en dehors d'un nombre fini de points donnés. On a donc le résultat cherché lorsque  $k$  est de caractéristique  $p > 0$ .

**Étape 2.** — On suppose  $k$  de caractéristique nulle. On pose  $d := 2 \dim(X) \frac{H \cdot C}{-K_X \cdot C}$ . On suppose  $X \subset \mathbf{P}^N$  pour un entier  $N$  convenable. Soient  $F_1, \dots, F_r \in k[X_0, \dots, X_N]$  des équations homogènes de  $X$  (dans  $\mathbf{P}^N$ ) et soit  $A \subset k$  une  $\mathbf{Z}$ -algèbre de type fini telle que  $F_i \in A[X_0, \dots, X_N]$  pour tout  $i$ . Soit enfin  $\mathcal{X} \rightarrow \text{Spec}(A)$  le schéma projectif sur  $\text{Spec}(A)$  défini par les mêmes équations. On suppose également que « les coordonnées » homogènes de  $x$  sont dans  $A$ ; on note  $x_A$  la section de  $\mathcal{X} \rightarrow \text{Spec}(A)$  correspondante. On note au passage que  $A$  est un anneau de Jacobson, *i.e.*, les points fermés (de  $\text{Spec}(A)$ ) sont denses.

On pose  $S := \text{Spec}(A)$ . On peut toujours, quitte à remplacer  $S$  par un ouvert affine dense, supposer  $\mathcal{X}$  lisse sur  $S$  ([Gro65, Théorème 6.9.1] et [Gro66, Théorème 12.2.4]).

On considère maintenant le  $S$ -schéma quasi-projectif de type fini  $\text{Hom}_S^{\leq d}(\mathbf{P}_A^1, \mathcal{X}; 0 \mapsto x_A)$  paramétrant les morphismes de degré au plus  $d$ . Si  $s \in S$  alors on sait d'une part que la fibre en  $s$  du morphisme  $\text{Hom}_S^{\leq d}(\mathbf{P}_A^1, \mathcal{X}; 0 \mapsto x_A) \rightarrow S$  s'identifie au  $k(s)$ -schéma  $\text{Hom}_{k(s)}^{\leq d}(\mathbf{P}_{k(s)}^1, \mathcal{X}_s; 0_s \mapsto x_s)$  et d'autre part que le  $k(\bar{s})$ -schéma  $\text{Hom}_{k(s)}^{\leq d}(\mathbf{P}_{k(s)}^1, \mathcal{X}_s; 0_s \mapsto x_s) \otimes k(\bar{s})$  s'identifie au  $k(\bar{s})$ -schéma  $\text{Hom}_{k(\bar{s})}^{\leq d}(\mathbf{P}_{k(\bar{s})}^1, \mathcal{X}_s \otimes k(\bar{s}); 0_{\bar{s}} \mapsto x_{\bar{s}})$  où  $k(\bar{s})$  désigne une clôture algébrique de  $k(s)$ . Or,  $A$  étant une algèbre de type fini sur  $\mathbf{Z}$ , si  $s$  est un point fermé alors  $k(s)$  est un corps fini. On déduit des résultats démontrés ci-dessus que le  $k(\bar{s})$ -schéma  $\text{Hom}_{k(\bar{s})}^{\leq d}(\mathbf{P}_{k(\bar{s})}^1, \mathcal{X}_s \otimes k(\bar{s}); 0_{\bar{s}} \mapsto x_{\bar{s}})$  n'est pas vide, autrement dit, que l'image du morphisme  $\text{Hom}_S^{\leq d}(\mathbf{P}_A^1, \mathcal{X}; 0 \mapsto x_A) \rightarrow S$  contient tous les points fermés de  $S$ . On sait aussi, d'après le théorème de Chevalley, que l'image de ce morphisme est constructible. On en déduit finalement que le point générique de  $S$  est dans l'image de  $\text{Hom}_S^{\leq d}(\mathbf{P}_A^1, \mathcal{X}; 0 \mapsto x_A) \rightarrow S$ , ce qui est la conclusion cherchée.  $\square$

**Lemme 6.8** ([Deb01, Lemma 3.7]). — Soient  $X$  une variété lisse projective et  $H$  un diviseur ample sur  $X$ . Soit  $d \in \mathbf{N}$ . On note  $\text{Hom}^{\leq d}(\mathbf{P}^1, X)$  la  $k$ -variété quasi-projective paramétrant

les courbes rationnelles de degré  $\leq d$ . Alors l'image du morphisme d'évaluation

$$\mathbf{P}^1 \times \mathrm{Hom}^{\leq d}(\mathbf{P}^1, X) \rightarrow X$$

est fermée.

*Démonstration.* — C'est une conséquence facile du lemme 6.6.  $\square$

On déduit facilement de la proposition 6.4 et du théorème précédent le résultat suivant.

**Corollaire 6.9** ([Mor79]). — Soient  $X$  une variété de Fano et  $x \in X$ . Alors, il existe une courbe rationnelle  $\Gamma \subset X$  passant par  $x$  et vérifiant  $0 < -K_X \cdot \Gamma \leq \dim(X) + 1$ .

On obtient avec des arguments analogues un résultat dans une situation relative.

**Proposition 6.10** ([Miy93] et [Deb01, Proposition 3.11]). — Soient  $X$  et  $Y$  des variétés projectives et lisses et  $\pi : X \rightarrow Y$  un morphisme surjectif et génériquement lisse. Soient  $f : C \rightarrow X$  une courbe lisse non rationnelle et  $c$  un point de  $C$ . Si  $f(C)$  rencontre le lieu où  $\pi$  est lisse et si

$$-K_{X/Y} \cdot f_*C - g(C)(\dim(X) - \dim(Y)) \geq 1$$

alors il existe un morphisme  $f' : C \rightarrow X$  et un 1-cycle rationnel effectif non nul  $Z$  sur  $X$  passant par  $f(c)$  tel que

$$f_*C \equiv f'_*C + Z, \pi(Z) = \pi(f(c)) \text{ et } \pi \circ f' = \pi \circ f.$$

Ce résultat permet par exemple de démontrer l'énoncé suivant.

**Théorème 6.11** ([Miy93], [Zha96] et [Deb01, Theorem 3.12])

Soient  $X$  et  $Y$  des variétés projectives et lisses et  $\pi : X \rightarrow Y$  un morphisme surjectif non constant. On suppose qu'au moins l'une des fibres de  $\pi$  est lisse. Soit  $H$  un diviseur ample sur  $X$ . Alors, pour tout rationnel  $\varepsilon > 0$ , le diviseur  $-K_{X/Y} - \varepsilon\pi^*H$  n'est pas nef.

*Démonstration.* — On suppose qu'il existe un rationnel  $\varepsilon > 0$  tel que le diviseur  $-K_{X/Y} - \varepsilon\pi^*H$  soit nef. Soit  $f : C \rightarrow X$  une courbe lisse connexe non rationnelle rencontrant le lieu où  $\pi$  est lisse. On suppose également que  $f(C)$  n'est pas contractée par  $\pi$ . Soient  $A$  un diviseur ample sur  $X$ . On a bien sûr  $\pi^*H \cdot f_*C > 0$  et on peut trouver un rationnel  $\alpha > 0$  tel que  $(\varepsilon\pi^*H - \alpha A) \cdot f_*C > 0$ . On note au passage qu'un multiple entier convenable de  $-K_{X/Y} - \varepsilon\pi^*H + \alpha A$  est ample et en particulier nef.

On peut toujours supposer, quitte à réduire « modulo  $p$  » que le corps  $k$  est de caractéristique  $p > 0$  (en utilisant la méthode expliquée dans la démonstration du théorème 6.7). On fixe un entier  $m$  tel que

$$p^m(\varepsilon\pi^*H - \alpha A) \cdot f_*C - g(C)(\dim(X) - \dim(Y)) \geq 0$$

de sorte que

$$-K_{X/Y} \cdot f_{m*}C_m - g(C)(\dim(X) - \dim(Y)) > p^m(\varepsilon\pi^*H - \alpha A) \cdot f_*C - g(C)(\dim(X) - \dim(Y)) \geq 0$$

où la courbe  $f_m : C_m \rightarrow X$  est obtenue en itérant  $m$ -fois le Frobenius relatif et en composant avec  $f$ . Il existe donc, d'après la proposition 6.10, un morphisme  $f'_m : C_m \rightarrow X$  tel que

$$A \cdot f'_{m*}C_m < A \cdot f_{m*}C_m \text{ et } \pi \circ f'_m = \pi \circ f_m.$$

On a encore

$$p^m(\varepsilon\pi^*H - \alpha A) \cdot f'_*C - g(C)(\dim(X) - \dim(Y)) \geq 0$$

car  $A \cdot f'_{m*} C_m < A \cdot f_{m*} C_m$ . On sait aussi que  $f'(C)$  rencontre le lieu où  $\pi$  est lisse puisque  $\pi \circ f'_m = \pi \circ f_m$ . On peut donc remplacer  $f$  par  $f'$  et recommencer. On obtient la contradiction cherchée puisque  $0 < A \cdot f'_{m*} C_m < A \cdot f_{m*} C_m$ .  $\square$

## 7. Démonstration de la conjecture d'Hartshorne, d'après Mori

On peut maintenant démontrer le très joli résultat suivant conjecturé par Hartshorne. On fixe un corps  $k$  algébriquement clos.

**Théorème 7.1** ([Mor79]). — *Soit  $X$  une  $k$ -variété lisse projective. Si  $T_X$  est ample alors  $X \simeq \mathbf{P}^n$  où  $n := \dim(X)$ .*

*Démonstration.* — L'idée de la démonstration est la suivante. On cherche à retrouver la géométrie des droites dans l'espace projectif. On fixe un point  $x \in \mathbf{P}^n$ ; l'ensemble  $H_x$  des droites passant par  $x$  est isomorphe à  $\mathbf{P}^{n-1}$ . Soit  $U_x$  la variété d'incidence associée, c'est-à-dire,

$$U_x := \{([\ell], y) \in H_x \times \mathbf{P}^n \mid y \in \ell\} \subset H_x \times \mathbf{P}^n,$$

et soient  $\pi_x$  et  $e_x$  les restrictions à  $U_x$  des projections sur  $H_x$  et  $\mathbf{P}^n$  respectivement. La fibre de  $\pi_x$  au-dessus d'un point  $[\ell] \in H_x$  s'identifie à la droite de  $\{[\ell]\} \times \mathbf{P}^n \simeq \mathbf{P}^n$  correspondante;  $e_x$  induit un isomorphisme de l'ouvert  $U_x \setminus e_x^{-1}(x)$  sur  $\mathbf{P}^n \setminus \{x\}$  et contracte  $e_x^{-1}(x) \simeq H_x$  sur  $\{x\}$ . Le morphisme  $e_x$  est en fait l'éclatement du point  $x$  dans  $\mathbf{P}^n$  et  $U_x$  s'identifie à la variété  $\mathbf{P}_{\mathbf{P}^{n-1}}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(1))$  au-dessus de  $H_x \simeq \mathbf{P}^{n-1}$ .

**Étape 1.**— On sait d'après le corollaire 6.9 que pour tout  $x \in X$  il existe  $f : \mathbf{P}^1 \rightarrow X$  tel que  $x \in f(\mathbf{P}^1)$  et  $0 < -K_X \cdot f_* \mathbf{P}^1 \leq n + 1$ .

On considère un tel  $f : \mathbf{P}^1 \rightarrow X$ . On a

$$f^* T_X \simeq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(a_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(a_n)$$

où  $0 < a_1 \leq \cdots \leq a_n$  puisque  $f^* T_X$  est ample. On a aussi  $T_{\mathbf{P}^1} \subset f^* T_X$  puisque  $f$  n'est pas constant et donc  $a_n \geq 2$ . On a finalement

$$f^* T_X \simeq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1)^{\oplus n-1}$$

et  $f$  n'est donc pas ramifié.

**Étape 2.**— Soit  $f : \mathbf{P}^1 \rightarrow X$  comme ci-dessus. On va maintenant démontrer que  $f$  est en fait un plongement. On suppose donc que  $f$  n'est pas injectif et on fixe un point lisse  $x$  de  $f(\mathbf{P}^1)$ . On note  $C \subset \mathbf{P}^2$  une cubique nodale; il existe un point lisse  $c \in C$  et une factorisation de  $f$  à travers  $h : C \rightarrow X$  telle que  $h(c) = x$ .

On sait d'après le théorème 2.11 que

$$\dim_{[h]} \mathrm{Hom}(C, X; h|_{\{c\}}) \geq \chi(C, h^* T_X \otimes \mathcal{I}_c) \geq -K_X \cdot h_* C - n \geq 1$$

et, puisque le groupe des automorphismes de  $C$  fixant  $c$  est fini, on peut donc trouver une courbe lisse  $T \rightarrow \mathrm{Hom}(\mathbf{P}^1, X; f|_{\{0\}})$  passant par  $[f]$  et ne contenant pas l'orbite de  $[f]$  sous le groupe des automorphismes de  $\mathbf{P}^1$  fixant 0 telle que le  $f_t : \mathbf{P}^1 \rightarrow X$  ne soit pas injectif pour tout  $t \in T$ .

Soit  $\bar{T}$  une compactification lisse de  $T$  ; l'image de l'application rationnelle

$$ev : \mathbf{P}^1 \times \bar{T} \dashrightarrow X$$

est une surface. Soit  $S \rightarrow X \times \bar{T}$  la normalisée de l'adhérence de l'image du morphisme  $\mathbf{P}^1 \times T \rightarrow X \times T \subset X \times \bar{T}$ . On note  $\pi : S \rightarrow \bar{T}$  et  $e : S \rightarrow X$  les projections ;  $\pi$  est plat et ses fibres générales sont isomorphes à  $\mathbf{P}^1$ . On a aussi  $-K_X \cdot f_{t*} \mathbf{P}^1 = n + 1$  pour tout  $t \in \bar{T}$  et toutes les fibres de  $\pi$  sont donc irréductibles et réduites ; on déduit alors de [Har77, Chap. III Theorem 9.9] que  $S \rightarrow \bar{T}$  est une surface géométriquement réglée. Il existe enfin (par construction) une section  $T_x \subset S$  de  $\pi$  telle que  $e(T_x) = \{x\}$  et deux sections  $T_1, T_2 \subset S$  de  $\pi$  et un morphisme  $u : \bar{T} \rightarrow X$  tels que  $e|_{T_i} = u \circ \pi|_{T_i}$  pour  $i \in \{1, 2\}$ . Il suffit de montrer que  $T_1 \cap T_2$  est non vide (ou ce qui revient au même que  $T_1 \cdot T_2 > 0$ ) pour obtenir une contradiction : en effet, si  $T_1 \cap T_2$  est non vide et si  $t \in \pi(T_1 \cap T_2)$  alors  $f_t : S_t \rightarrow X$  est ramifié en tous les points de  $T_1 \cap T_2 \cap S_t$ . On suppose par exemple  $T_1 \neq T_x$ . On a, d'après [Har77, Chap. V Proposition 2.3],  $T_2 \sim T_x + \lambda_2 F$  où  $\lambda_2 \geq 0$  et  $F$  désigne une fibre de  $\pi$ . On a donc

$$T_1 \cdot T_2 = T_1 \cdot T_x + \lambda_2 T_1 \cdot F$$

et  $T_1 \cdot T_2 > 0$  sauf si  $\lambda_2 = 0$  auquel cas  $T_2 = T_x$  (puisque  $T_x^2 < 0$ ) puis  $e(T_2) = e(T_1) = \{x\}$ , ce qui absurde, comme le montre par exemple le calcul fait à la fin de la démonstration de la proposition 6.4.

**Étape 3.**—Soit  $f : \mathbf{P}^1 \rightarrow X$  comme ci-dessus et soit  $x = f(0)$ . Soit  $\text{Hom}^{n+1}(\mathbf{P}^1, X; f|_{\{0\}})$  le schéma paramétrant les morphismes de degré  $n+1$  relativement à  $-K_X$  ;  $\text{Hom}^{n+1}(\mathbf{P}^1, X; f|_{\{0\}})$  est une  $k$ -variété quasi-projective lisse de dimension  $n+1$  d'après les résultats de l'étape 1 et le théorème 2.11. Soient  $M_x$  la composante connexe de  $\text{Hom}^{n+1}(\mathbf{P}^1, X; f|_{\{0\}})$  passant par  $[f]$  et  $ev_x : \mathbf{P}^1 \times M_x \rightarrow X$  le morphisme d'évaluation. On note  $Y \rightarrow X$  la variété obtenue en éclatant le point  $x$  dans  $X$  et  $E \subset Y$  le diviseur exceptionnel. On sait d'après les résultats de l'étape 2 que pour tout  $f : \mathbf{P}^1 \rightarrow X$ ,  $f(\mathbf{P}^1)$  est une courbe lisse. On en déduit que  $\mathfrak{m}_x \mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_Y(-E)$  puis par la propriété universelle des éclatements (voir [Har77, Chap. II Proposition 7.14]) qu'il existe un relèvement  $\tilde{ev}_x$  de  $ev_x$  à  $Y$

$$\begin{array}{ccc} & & Y \\ & \nearrow \tilde{ev}_x & \downarrow \\ \mathbf{P}^1 \times M_x & \xrightarrow{ev_x} & X \end{array}$$

On obtient en particulier un morphisme

$$M_x \rightarrow \text{Hom}(\mathbf{P}^1, Y).$$

Le groupe  $G$  des automorphismes de  $\mathbf{P}^1$  fixant 0 agit naturellement sur  $\mathbf{P}^1$  et  $M_x$  ;  $ev_x$  (resp.  $\tilde{ev}_x$ ) est  $G$  équivariant si  $G$  agit diagonalement sur  $\mathbf{P}^1 \times M_x$  et trivialement sur  $X$  (resp.  $Y$ ).

On va maintenant démontrer que  $\tilde{ev}_x$  est lisse de dimension relative 2. On rappelle que, d'après la proposition 2.12, la différentielle de l'application dévaluation

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{P}^1 \times \text{Hom}(\mathbf{P}^1, Y) & \longrightarrow & Y \\ (p, [g]) & \longmapsto & g(p) \end{array}$$

est donnée par

$$\begin{array}{ccc} T_{\mathbf{P}^1 \times \text{Hom}(\mathbf{P}^1, Y), (p, [g])} = T_{\mathbf{P}^1, p} \oplus H^0(\mathbf{P}^1, g^* T_X) & \longrightarrow & T_{Y, g(p)} \\ (t, s) & \longmapsto & d_p g(t) + s(p). \end{array}$$

On sait bien par ailleurs que toute section (locale) du fibré vectoriel  $T_X$  nulle en  $x$  s'étend en une section (locale) sur  $Y$  de  $T_Y$ . Si  $g : \mathbf{P}^1 \rightarrow Y$  relève  $f : \mathbf{P}^1 \rightarrow X$  on obtient ainsi une inclusion  $H^0(\mathbf{P}^1, f^*T_X \otimes \mathcal{S}_0) \subset H^0(\mathbf{P}^1, f^*T_Y)$  identifiant  $H^0(\mathbf{P}^1, f^*T_X \otimes \mathcal{S}_0)$  à l'ensemble des sections  $s \in H^0(\mathbf{P}^1, f^*T_Y)$  telles que  $s(g(0)) \in T_{E,g(0)} \subset T_{Y,g(0)}$ ; l'application précédente est en fait la différentielle du morphisme  $M_x \rightarrow \text{Hom}(\mathbf{P}^1, Y)$  en  $[f]$ . On vérifie enfin facilement que

$$g^*T_Y \simeq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}^{\oplus n-1}$$

puisque

$$f^*T_X \simeq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1)^{\oplus n-1}.$$

On en déduit immédiatement que la différentielle de  $\tilde{e}v_x$  est surjective en tout point. Si  $y \in Y \setminus E$  alors  $\tilde{e}v_x^{-1}(y)$  est la réunion (disjointe) des  $G$ -orbites des courbes  $f : \mathbf{P}^1 \rightarrow X$  passant par  $y$  et si  $y \in E$  alors  $\tilde{e}v_x^{-1}(y)$  est la réunion (disjointe) des  $G$ -orbites des courbes  $f : \mathbf{P}^1 \rightarrow X$  ayant la direction tangente en  $x$  correspondant à  $y \in E$  où l'on a identifié  $E$  à  $\mathbf{P}(T_{X,x}^*)$ . On obtient un morphisme lisse de dimension relative 2

$$\begin{aligned} \tilde{e}v_x^{-1}(E) = \{0\} \times M_x \simeq M_x &\rightarrow E \simeq \mathbf{P}(T_{X,x}^*) \\ [f] &\mapsto \mathbf{P}(d_0f(T_{\mathbf{P}^1,0})) \end{aligned}$$

**Étape 4.**—On note  $U_x$  la normalisée de l'adhérence de l'image du morphisme

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^1 \times M_x &\rightarrow E \times Y \\ (p, [f]) &\mapsto (\mathbf{P}(d_0f(T_{\mathbf{P}^1,0})), g(p)) \end{aligned}$$

où  $g : \mathbf{P}^1 \rightarrow Y$  relève  $f : \mathbf{P}^1 \rightarrow X$ .

On vérifie maintenant que le morphisme induit  $\mathbf{P}^1 \times M_x \rightarrow U_x$  est surjectif. Soit  $(T, o)$  une courbe lisse pointée,  $\mu : T \rightarrow U_x \subset E \times Y$  un morphisme et  $\nu : T \setminus \{o\} \rightarrow \mathbf{P}^1 \times M_x$  un relèvement de  $\mu$ . Il suffit de montrer qu'il existe  $\nu' : T \rightarrow \mathbf{P}^1 \times M_x$  tel que l'image de  $\nu'(o)$  dans  $U_x$  soit  $\mu$ . On note que le morphisme  $\nu$  induit, par composition avec la projection canonique sur le second facteur, un morphisme  $T \setminus \{o\} \rightarrow M_x$ . Soit  $S \rightarrow Y \times T$  la normalisée de l'adhérence de l'image du morphisme  $\mathbf{P}^1 \times (T \setminus \{o\}) \rightarrow Y \times T$ . On note  $\pi : S \rightarrow T$  et  $e : S \rightarrow Y$  les projections;  $\pi$  est plat et ses fibres générales sont isomorphes à  $\mathbf{P}^1$ . On a aussi  $-K_X \cdot f_{t*}\mathbf{P}^1 = n + 1$  pour tout  $t \in T$  et toutes les fibres de  $\pi$  sont donc irréductibles et réduites; on déduit alors à nouveau de [Har77, Chap. III Theorem 9.9] que  $S \rightarrow T$  est une surface géométriquement réglée. On obtient aussi, en composant  $\nu$  avec la projection canonique sur le premier facteur, un morphisme  $T \setminus \{o\} \rightarrow \mathbf{P}^1$  et donc une section  $T_\nu$  de  $\pi$ . On peut donc supposer, quitte à remplacer  $T$  par un voisinage ouvert de  $o \in T$  convenable que  $S \simeq \mathbf{P}^1 \times T$ . On peut également supposer, quitte à effectuer le changement de base  $e^{-1}(E) \rightarrow T$ , qu'il existe une section  $T_x \subset S$  de  $\pi$  telle que  $e(T_x) = e(S) \cap E$ . On peut enfin en choisissant convenablement l'isomorphisme  $S \simeq \mathbf{P}^1 \times T$  et quitte à nouveau à remplacer  $T$  par un voisinage ouvert de  $x$  supposer que la section  $T_x$  est  $\{0\} \times T$ . On obtient ainsi (en identifiant  $T_\nu$  à  $T$ ) un morphisme  $\nu' : T \rightarrow \mathbf{P}^1 \times M_x$  qui convient.

On remarque enfin, d'une part, que le morphisme  $\mathbf{P}^1 \times M_x \rightarrow U_x$  est équidimensionnel et donc universellement ouvert par le critère de Chevalley (voir [Gro65, Corollaire 14.4.4]) et d'autre part, que ses fibres sont réduites puisque les fibres du morphisme  $\mathbf{P}^1 \times M_x \rightarrow U_x \rightarrow Y$



le sont : le morphisme  $\mathbf{P}^1 \times M_x \rightarrow U_x$  est donc plat d'après [Gro66, Corollaire 15.2.3]. On déduit alors de [Gro67, Proposition 17.7.7] et de ce qui précède que le morphisme

$$U_x \rightarrow Y$$

est un revêtement étale. On sait aussi, par construction, que l'image de  $\{0\} \times M_x$  dans  $U_x$  coïncide avec l'image inverse de  $E$  dans  $U_x$ . On en déduit que  $U_x \rightarrow Y$  est un isomorphisme puisque  $\{0\} \times M_x$  est connexe et  $E \simeq \mathbf{P}^{n-1}$  est simplement connexe. On déduit également de ce qui précède que le morphisme

$$\begin{array}{c} U_x \\ \downarrow \\ E \end{array}$$

est lisse (et propre) de dimension relative 1 et enfin à fibres connexes ( $\simeq \mathbf{P}^1$ ). On note  $H_x$  la copie de  $E$  ci-dessus. On a finalement un diagramme

$$\begin{array}{ccc} U_x \simeq Y & \xrightarrow{e_x} & X \\ \pi_x \downarrow & & \\ H_x \simeq \mathbf{P}^{n-1} & & \end{array}$$

On en particulier montré que les « quotients géométriques » (voir [MFK94]) de  $\mathbf{P}^1 \times M_x$  et  $M_x$  par  $G$  existent et s'identifient à  $U_x$  et  $H_x$  respectivement.

**Étape 5.**—On a une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{U_x} \rightarrow \mathcal{O}_{U_x}(E) \rightarrow \mathcal{O}_E(E) \simeq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(-1) \rightarrow 0$$

et (en appliquant  $\pi_{x*}$ ) une autre suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}} \rightarrow \pi_{x*} \mathcal{O}_{U_x}(E) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(-1) \rightarrow 0$$

nécessairement scindée puisque  $h^1(\mathbf{P}^{n-1}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(1)) = 0$ . On identifie ainsi  $U_x/H_x$  au fibré  $\mathbf{P}_{\mathbf{P}^{n-1}}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(-1))/\mathbf{P}^{n-1}$  et  $E \subset U_x$  à la section  $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(-1) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(-1)$ . On a bien  $X \simeq \mathbf{P}^n$ .  $\square$

On démontre, avec des arguments analogues et un peu plus d'efforts, le résultat suivant dû à Lazarsfeld.

**Théorème 7.2** ([Laz84]). — *Soit  $X$  une  $k$ -variété lisse projective et soit  $\mathbf{P}^n \rightarrow X$  un morphisme dominant et séparable où  $n := \dim(X)$ . On a alors  $X \simeq \mathbf{P}^n$ .*

## Références

- [AK03] C. ARAUJO & J. KOLLÁR – « Rational curves on varieties », Higher dimensional varieties and rational points (Budapest, 2001), Bolyai Soc. Math. Stud., vol. 12, Springer, Berlin, 2003, p. 13–68.
- [Bal08] E. BALDWIN – « A GIT construction of moduli spaces of stable maps in positive characteristic », *J. Lond. Math. Soc. (2)* **78** (2008), no. 1, p. 107–124.
- [Bon08] L. BONAVERO – « Variétés rationnellement connexes sur un corps algébriquement clos », prépublication électronique [arXiv :0806.2912](https://arxiv.org/abs/0806.2912), 2008.
- [BS08] E. BALDWIN & D. SWINARSKI – « A geometric invariant theory construction of moduli spaces of stable maps », *Int. Math. Res. Pap. IMRP* (2008), no. 1, p. Art. ID rpn 004, 104.
- [Cam91] F. CAMPANA – « Une version géométrique généralisée du théorème du produit de Nadel », *Bull. Soc. Math. France* **119** (1991), no. 4, p. 479–493.
- [Deb01] O. DEBARRE – *Higher-dimensional algebraic geometry*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 2001.
- [Deb03] ———, « Variétés rationnellement connexes (d’après T. Graber, J. Harris, J. Starr et A. J. de Jong) », *Astérisque* (2003), no. 290, p. Exp. No. 905, ix, 243–266, Séminaire Bourbaki. Vol. 2001/2002.
- [FM98] B. FANTECHI & M. MANETTI – « Obstruction calculus for functors of Artin rings. I », *J. Algebra* **202** (1998), no. 2, p. 541–576.
- [FP97] W. FULTON & R. PANDHARIPANDE – « Notes on stable maps and quantum cohomology », Algebraic geometry—Santa Cruz 1995, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 62, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, p. 45–96.
- [GHS03] T. GRABER, J. HARRIS & J. STARR – « Families of rationally connected varieties », *J. Amer. Math. Soc.* **16** (2003), no. 1, p. 57–67 (electronic).
- [Gro61] A. GROTHENDIECK – « Éléments de géométrie algébrique. II. Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1961), no. 8, p. 222.
- [Gro65] ———, « Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. II », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1965), no. 24, p. 231.
- [Gro66] ———, « Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. III », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1966), no. 28, p. 255.
- [Gro67] ———, « Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas IV », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1967), no. 32, p. 361.
- [Gro95] A. GROTHENDIECK – « Techniques de construction et théorèmes d’existence en géométrie algébrique. IV. Les schémas de Hilbert », Séminaire Bourbaki, Vol. 6, Soc. Math. France, Paris, 1995, p. Exp. No. 221, 249–276.
- [Har77] R. HARTSHORNE – *Algebraic geometry*, Springer-Verlag, New York, 1977, Graduate Texts in Mathematics, No. 52.
- [HH85] R. HARTSHORNE & A. HIRSCHOWITZ – « Smoothing algebraic space curves », Algebraic geometry, Sitges (Barcelona), 1983, Lecture Notes in Math., vol. 1124, Springer, Berlin, 1985, p. 98–131.
- [KM94] M. KONTSEVICH & Y. MANIN – « Gromov-Witten classes, quantum cohomology, and enumerative geometry », *Comm. Math. Phys.* **164** (1994), no. 3, p. 525–562.
- [KMM92a] J. KOLLÁR, Y. MIYAOKA & S. MORI – « Rational connectedness and boundedness of Fano manifolds », *J. Differential Geom.* **36** (1992), no. 3, p. 765–779.
- [KMM92b] ———, « Rationally connected varieties », *J. Algebraic Geom.* **1** (1992), no. 3, p. 429–448.
- [Knu71] D. KNUTSON – *Algebraic spaces*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 203, Springer-Verlag, Berlin, 1971.
- [Laz84] R. LAZARSEFELD – « Some applications of the theory of positive vector bundles », Complete intersections (Acireale, 1983), Lecture Notes in Math., vol. 1092, Springer, Berlin, 1984, p. 29–61.

- [MFK94] D. MUMFORD, J. FOGARTY & F. KIRWAN – *Geometric invariant theory*, third éd., Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (2) [Results in Mathematics and Related Areas (2)], vol. 34, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [Miy93] Y. MIYAOKA – « Relative deformations of morphisms and applications to fibre spaces », *Comment. Math. Univ. St. Paul.* **42** (1993), no. 1, p. 1–7.
- [MM86] Y. MIYAOKA & S. MORI – « A numerical criterion for uniruledness », *Ann. of Math. (2)* **124** (1986), no. 1, p. 65–69.
- [Mor79] S. MORI – « Projective manifolds with ample tangent bundles », *Ann. of Math. (2)* **110** (1979), no. 3, p. 593–606.
- [Nad91] A. M. NADEL – « The boundedness of degree of Fano varieties with Picard number one », *J. Amer. Math. Soc.* **4** (1991), no. 4, p. 681–692.
- [Par07] A. E. PARKER – « An elementary GIT construction of the moduli space of stable maps », *Illinois J. Math.* **51** (2007), no. 3, p. 1003–1025.
- [Sch68] M. SCHLESSINGER – « Functors of Artin rings », *Trans. Amer. Math. Soc.* **130** (1968), p. 208–222.
- [Ser06] E. SERNESI – *Deformations of algebraic schemes*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 334, Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [sga03] *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1)* – Documents Mathématiques (Paris) [Mathematical Documents (Paris)], 3, Société Mathématique de France, Paris, 2003, Séminaire de géométrie algébrique du Bois Marie 1960–61. [Algebraic Geometry Seminar of Bois Marie 1960–61], Directed by A. Grothendieck, With two papers by M. Raynaud, Updated and annotated reprint of the 1971 original [Lecture Notes in Math., 224, Springer, Berlin; MR0354651 (50 #7129)].
- [Wit10] O. WITTENBERG – « La connexité rationnelle en arithmétique », prépublication électronique [arXiv :1003.1659](https://arxiv.org/abs/1003.1659), 2010.
- [Zha96] Q. ZHANG – « On projective manifolds with nef anticanonical bundles », *J. Reine Angew. Math.* **478** (1996), p. 57–60.