Equations dispersives non linéaires

Anne de Bouard

Cours à l'Ecole d'Eté de Mathématiques
Institut Fourier, Grenoble
20 juin-8 juillet 2005

1 Introduction

Le but de ce cours est de donner un aperçu de la théorie de base pour l'étude de certaines équations aux dérivées partielles modélisant la propagation d'ondes dans des milieux faiblement non linéaires et dispersifs. Cette théorie s'est largement étoffée au cours des quinze dernières années, mais nous nous concentrerons sur les parties les plus classiques de la théorie qui permettent d'appréhender les développement les plus recents en matière d'étude de la dynamique de ces équations.

Nous nous intéresserons donc à des équations de la forme

$$\partial_t u = Lu + f(u)$$

où $u = u(t,x)$ est à valeurs réelles ou complexes (ou éventuellement à valeurs dans $\mathbb{R}^k$), $t \in \mathbb{R}^+$ et $x \in \mathbb{R}^n$; l'opérateur L sera anti-adjoint, et typiquement défini à l'aide de la transformée de Fourier par

$$\widehat{Lu}(\xi) = ip(\xi)\hat{u}(\xi)$$

où p est une fonction à valeurs réelles; enfin, f est un terme non linéaire, pouvant éventuellement contenir des dérivées (d'ordre peu élevé) de u. L'équation libre (linéaire) sera dite dispersive si les solutions, même bien localisées en espace initialement, ont tendance à se disperser dans tout l'espace en temps grand.

Pour donner une définition plus mathématique, on peut déterminer la relation de dispersion de l'équation linéaire, obtenue en cherchant des solutions particulières sous la forme d'ondes planes $e^{i(\xi.x-\omega t)}$, où $\xi \in \mathbb{R}^n$. Cette relation de dispersion, qui s'écrit de manière générale $G(\omega,\xi) = 0$, se ramène souvent à une ou plusieurs équations de la forme $\omega = \omega(\xi)$ (par exemple si $\widehat{Lu}(\xi) = ip(\xi)\hat{u}(\xi)$, alors $\omega(\xi) = -p(\xi)$). L'équation sera alors dite dispersive si $\omega(\xi)$ est réelle et si $\det\left|\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi_i\partial\xi_j}\right| \not\equiv 0$.

Ceci traduit le fait que la vitesse de groupe dépend vraiment du nombre d'onde, c'est à dire que des modes de Fourier différents voyagent à des vitesses différentes, et donc que les paquets d'ondes auront tendance à se disperser.

Cette définition est restrictive et demande qu'il y ait des ondes planes solutions. Elle ne prend pas en compte, par exemple, le cas où l'opérateur L est à coefficients variables. Il est possible d'adapter la définition à de tels cas (voir [75]).

A titre d'exemple, signalons que l'équation des ondes, $\partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u = 0$, n'est pas dispersive puisque $\omega(\xi) = \pm c\xi$; l'équation de Klein-Gordon $\partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u + u = 0$ est aussi une équation hyperbolique, mais est quant à elle dispersive; en effet, $\omega(\xi) = \pm\sqrt{1 + c^2\xi^2}$. Cependant, elle est peu dispersive puisque la vitesse de groupe $\omega'(\xi)$ reste bornée. L'équation de Airy $\partial_t u + \alpha\partial_x u + \beta\partial_x^3 u = 0$ est un des principaux exemples d'équations linéaires dispersives (on a ici $\omega(\xi) = \alpha\xi - \beta\xi^3$), avec l'équation de Schrödinger $i\partial_t u \pm \Delta u = 0$, pour laquelle $\omega(\xi) = \pm|\xi|^2$.

Une des conséquences mathématiques de la dispersion pour les équations linéaires est la présence d'effets régularisants locaux, c'est à dire qu'à l'instant $t > 0$, les solutions sont localement en espace plus régulières qu'elles ne le sont à l'instant initial (ces effets régularisants ne peuvent pas être globaux puisque, pour ces équations linéaires, les normes de Sobolev sont conservées au cours du temps, comme on le voit facilement en prenant la transformée de Fourier; de plus, elles sont toutes réversibles en temps). Ces effets régularisants sont liés à la dispersion : ils n'existent pas pour l'équation des ondes par exemple; plus l'équation est dispersive, plus ces effets seront importants.

Pour les équations non linéaires, ce phénomène pourra se traduire par deux comportements très différents: soit la non linéarité renforce la dispersion et alors les solutions ont un comportement "linéaire"; en particulier, elles tendent vers zero en norme L^∞. Ce sujet, bien que très actif, ne sera pas abordé ici. Si par contre non linéarité et dispersion se compensent, alors on observe en général des solutions localisées qui se propagent sans changement de forme, de type ondes progressives ou états stationnaires parfois appelés solitons. C'est plutôt sur l'étude de la dynamique des ces solutions qu'est axé le cours (qui se restreindra aux résultats les plus élémentaires).

On donne ci-après quelques exemples modèles d'équations dispersives non linéaires.

Equations de type KdV: Cela concerne des équations qui se mettent en général sous la forme

$$\partial_t u + \partial_x M u + \partial_x f(u) = 0$$

où $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, $u(t,x)$ (ou $u(t,x,x^\perp)$ est à valeurs réelles. M est ici un opérateur différentiel ou pseudodifférentiel à coefficients constants, défini à l'aide de la transformée de Fourier par $\widehat{Mu}(\xi) = q(\xi)\hat{u}(\xi)$, q est un symbole à valeurs réelles.

• L'exemple modèle est l'équation de Korteweg-de Vries (KdV)

$$\partial_t u + \partial_x u + \partial_x^3 u + \partial_x(u^2) = 0, \ t \in \mathbb{R}, \ x \in \mathbb{R},$$

modèle de propagation unidirectionnelle pour les ondes longues à la surface de l'eau, en faible profondeur.

• L'équation de Benjamin-Ono (B.O)

$$\partial_t u + \partial_x u + \partial_x^2 \mathcal{H}(u) + \partial_x(u^2) = 0, \ t \in \mathbb{R}, \ x \in \mathbb{R},$$

où $\mathcal{H}$ est la transformée de Hilbert, i.e. $\mathcal{H}f(x) = \mathrm{vp}\frac{1}{x} * f$, est également un modèle de propagation d'ondes longues, mais il s'agit cette fois d'ondes internes dans des fluides stratifiés.

• L'equation de Kadomtsev-Petviashvili (KP) est un modèle bi ou tri-dimensionnel, qui tient compte cette fois de faibles perturbations transverses, dont la longueur d'onde est de l'ordre du carré de la longueur d'ondes dans la direction de propagation. Cette équation s'écrit en dimension deux :

$$\partial_x(\partial_t u + \gamma\partial_x^3 u + \partial_x(u^2)) + \partial_y^2 u = 0,\ t \in \mathbb{R},\ (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Suivant le signe de γ on obtient KPI ($\gamma < 0$) ou KPII ($\gamma > 0$); le comportement des solutions de KPI est très différent de celui des solutions de KPII.

• Une variante des modèles de type KdV est donnée par l'équation de Benjamin-Bona-Mahony (BBM) ou Regularized Long Wave equation (RLW) [2]

$$\partial_t u - \partial_t\partial_x^2 u + \partial_x(u + u^2) = 0,\ t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}.$$

Mise sous la forme

$$\partial_t u = -(1-\partial_x^2)^{-1}\partial_x(u+u^2),$$

l'équation fait clairement apparaître une faible dispersion, puisque l'expression $\omega(\xi) = -\frac{\xi}{1+\xi^2}$ montre que la vitesse de groupe est bornée. En conséquence, les effets régularisants sont pour cette équation inexistants : toute la partie singulière de la solution est contenue dans la donnée initiale .

La plupart des modèles ci-dessus possèdent une vitesse de groupe négative: c'est le cas de KdV, après changement de repère ($\omega'(\xi) = -3\xi^2$), Benjamin-Ono ($\omega'(\xi) = -2|\xi|$), KPII ($\partial_{\xi_1}\omega(\xi) = -3\gamma\xi_1^2 - \xi_2^2/\xi_1^2$) et BBM ($\omega'(\xi) = \frac{-1+\xi^2}{(1+\xi^2)}$ n'est pas négative, mais toujours inférieure à 1, qui est la valeur minimale de la vitesse pour les ondes solitaires de BBM) mais ce n'est pas le cas pour l'équation de KPI. Cette propriété implique que les (petites) ondes dispersives voyagent en régime linéaire vers la gauche, tandis que les ondes non linéaires, comme on va le voir plus tard, voyagent vers la droite. Ceci entrainera donc un découplage entre ces deux types d'ondes dans la dynamique des solutions. Ce phénomène est d'une importance capitale pour l'étude de la stabilité asymptotique de ce type d'équations.

Equations de type NLS : L'exemple type est donné par l'équation de Schrödinger non linéaire

$$i\partial_t u + \Delta u + \lambda|u|^{2\sigma}u = 0,$$

où u est une fonction à valeurs complexes, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, et $\lambda = \pm 1$. Cette équation intervient en physique des plasmas (c'est alors un cas particulier de l'équation de Zakharov), en optique non linéaire (par exemple comme modèle de propagation dans les fibres optiques) mais également dans le contexte des ondes de surface, lorsque la profondeur est infinie. Le cas le plus souvent rencontré dans les modèles physiques correspond à $\sigma = 1$, mais ce n'est pas le seul. En hydrodynamique, on rencontre également l'équation en deux dimensions dans laquelle l'opérateur Δ est remplacé par l'opérateur $\partial_x^2 - \partial_y^2$. On n'a que très peu de résultats qualitatifs rigoureux dans ce cas (en particulier sur l'explosion en temps fini, et les phénomènes de stabilité transverse auxquels on s'attend). Par certains côtés, cette équation est qualitativement proche du modèle de KPII.

• Un autre exemple est donné par le système de Davey-Stewartson (voir [21]):

$$\left\{\begin{array}{rcl} i\partial_t u + \delta\partial_x^2 u + \partial_y^2 u & = & \chi|u|^2 u + bu\partial_x\varphi \\ \partial_x^2\varphi + m\partial_y^2\varphi & = & \partial_x(|u|^2) \end{array}\right.$$

où les paramètres vérifient $|\delta| = |\chi| = 1$, $m, b \in \mathbb{R}$ et le seul cas non physique est celui où $\delta = -1$ et $m < 0$; lorsque $\delta = 1$ et $m > 0$ (disons $m = 1$), le système se réécrit sous la forme d'une équation de NLS avec un terme non local:

$$i\partial_t u + \Delta u = \chi|u|^2 u + buE(|u|^2),$$

où $E(v) = \Delta^{-1}\partial_x^2 v$ définit un opérateur non local d'ordre zero. Ce modèle intervient également dans le contexte des ondes hydrodynamiques.

On traitera dans ce cours essentiellement les deux exemples types suivants : l'équation de KdV généralisée

$$\partial_t u + \partial_x^3 u + \partial_x(u^p) = 0,\ t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}$$

et l'équation de NLS

$$i\partial_t u + \Delta u + \lambda|u|^{2\sigma} u = 0,\ t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n;$$

dans cette dernière équation, on s'interessera essentiellement au cas $\lambda = +1$, c'est à dire au cas focalisant.

On commence par donner quelques résultats sur le problème de Cauchy pour ces deux équations en donnant quelques idées de preuves. Ensuite, on montrera comment les solutions peuvent être globalisées dans les cas sous-critiques grâce à la conservation de l'énergie, et de la norme L^2, après quoi on s'attaquera aux résultats de base sur la stabilité ou l'instabilité des ondes solitaires.

2 Existence et unicité des solutions du problème d'évolution

Le problème de Cauchy local et global constitue pour ces équations un vaste sujet, qui n'est, pour la plupart des modèles, toujours pas clôt. On n'abordera ici que les résultats nécessaires à l'étude de la dynamique des solutions, c'est à dire essentiellement le problème de Cauchy dans l'espace d'énergie, $H^1(\mathbb{R})$ ou $H^1(\mathbb{R}^n)$. Il est cependant nécessaire pour résoudre ce problème, sauf dans le cas très particulier de l'équation de NLS en dimension un, d'utiliser les propriétés dispersives de l'équation.

2.1 L'équation de NLS

Le problème non linéaire sera traité comme une perturbation du problème linéaire, à l'aide de la formule de Duhamel, et il est donc nécessaire d'obtenir d'abord les bonnes estimations sur l'équation linéaire.

2.1.1 Le problème linéaire

On considère donc l'équation

$$(1) \qquad \begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = 0, \quad u(t,x) \in \mathbb{C}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n \\ u(0) = \varphi \end{cases}$$

L'opérateur $i\Delta$ défini sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ et de domaine $H^2(\mathbb{R}^n)$ est anti-adjoint sur $L^2(\mathbb{R}^n)$; le théorème de Stone permet alors d'affirmer qu'il engendre un groupe unitaire sur $L^2(\mathbb{R}^n)$, que l'on note $U(t)$, de sorte que la solution de (1) est donnée par $u(t) = U(t)\varphi$. Il est facile de voir que $U(t)$ se prolonge en un opérateur linéaire sur l'espace $\mathcal{S}'$ des distributions tempérées, et en utilisant la transformation de Fourier, si $u = U(t)\varphi$ alors $\hat{u}(t,\xi) = e^{-it|\xi|^2}\hat{\varphi}(\xi)$. De plus, on a l'expression explicite de la solution fondamentale :

$$\mathcal{F}^{-1}(e^{-it|\xi|^2}) = \frac{1}{(4\pi it)^{n/2}} e^{i|x|^2/4t}$$

et donc pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$U(t)\varphi(x) = \frac{1}{(4\pi it)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i|x-y|^2/4t}\varphi(y)dy.$$

On en déduit que $U(t)$ envoie $L^1(\mathbb{R}^n)$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ avec, pour $t > 0$ et $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$,

$$|U(t)\varphi|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq Ct^{-n/2}|\varphi|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Comme d'autre part il est clair que $|U(t)\varphi|_{L^2} = |\varphi|_{L^2}$, on obtient par interpolation (en utilisant le Théorème de Riesz-Thorin):

Proposition 2.1 *Soient p, p' avec $2 \leq p \leq +\infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$; il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute $\varphi \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ et tout $t > 0$, $U(t)\varphi \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et*

$$\|U(t)\varphi\|_{L^p} \leq Ct^{-n(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}\|\varphi\|_{L^{p'}}.$$

Le calcul explicite de $U(t)\varphi$ pour $\varphi(x) = e^{-x^2}$ montre que cette borne est optimale: on obtient en effet

$$|(U(t)\varphi)(x)|^2 = \frac{1}{2\pi(1+4t^2)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{2(1+4t^2)}}.$$

Une telle estimation n'est pas possible lorsque $\mathbb{R}^n$ est remplacé par un ouvert borné régulier Ω : en effet, la continuité de l'injection de $L^2(\Omega)$ dans $L^{p'}(\Omega)$ dans ce cas, ainsi que l'unitarité de $U(t)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ impliqueraient alors

$$\|\varphi\|_{L^p(\Omega)} = \|U(t)U(-t)\varphi\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|U(-t)\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)} \leq C'\|U(-t)\varphi\|_{L^2(\Omega)} \leq C'\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}$$

pour tout $p \geq 2$, ce qui est absurde.

En vue de donner (sans démonstration) les estimations sur le groupe linéaire qui servent à traiter l'équation non linéaire, on définit la notion de paire admissible:

Définition 2.2 *Une paire (q,r) de nombres réels est dite admissible si $\frac{2}{q} = n(\frac{1}{2} - \frac{1}{r})$ et $2 \leq r < \frac{2n}{n-2}$ ($2 \leq r \leq +\infty$ si $n = 1$ et $2 \leq r < +\infty$ si $n = 2$).*

On a alors les estimations suivantes, où pour un réel donné, on note systématiquement p' l'exposant conjugué de p, c'est à dire le réel tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Théorème 2.3 *(Estimations de Strichartz)*
1. Soit $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$*; pour toute paire admissible* (q,r)*, la fonction* $t \mapsto U(t)\varphi$ *est une fonction de* $L^q(\mathbb{R}; L^r(\mathbb{R}^n)) \cap C(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^n))$*, et il existe une constante* $C > 0$ *telle que*

$$\|U(.)\varphi\|_{L^q(\mathbb{R};L^r(\mathbb{R}^n))} \leq C\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

2. Soit $T > 0$*; soient* (q,r) *et* (γ,ρ) *deux paires admissibles. Pour* $f = f(t,x)$ *donnée, on définit* Λf *la solution de* $i\partial_t u + \Delta u = f$*, de donnée initiale nulle, i.e.*

$$(\Lambda f)(t) = -i\int_0^t U(t-s)f(s)ds;$$

alors si $f \in L^{\gamma'}(0,T;L^{\rho'})$*,* $\Lambda f \in C([0,T];L^2(\mathbb{R}^n)) \cap L^q(0,T;L^r(\mathbb{R}^n))$ *et il existe une constante* $C > 0$ *ne dépendant que de* (q,r) *et* (γ,ρ) *telle que*

$$\|\Lambda f\|_{L^q(0,T;L^r)} \leq C\|f\|_{L^{\gamma'}(0,T;L^{\rho'})}.$$

L'inégalité montrée à l'origine par Strichartz (voir [67]) est celle donnée par le 1 du théorème 2.3. Cette inégalité a par la suite été généralisée, notamment par Ginibre et Vélo, qui en ont donné une preuve plus simple. Cette dernière preuve consiste à montrer d'abord l'inégalité du 2 dans le cas particulier où $(\gamma,\rho) = (q,r)$, en utilisant l'estimation de dispersion ponctuelle de la proposition 2.1 et l'inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev, puis à utiliser l'argument abstrait d'analyse fonctionnelle suivant (souvent appelé argument TT^*) : Si H est un espace de Hilbert, B un espace de Banach et B' son dual, et si T est un opérateur linéaire de H dans B et T^* est son adjoint, alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- T est borné de H dans B i.e. $\|Tu\|_B \leq C\|u\|_H$
- T^* est borné de B' dans H i.e. $\|T^*u\|_H \leq C\|u\|_{B'}$
- TT^* est borné de B' dans B i.e. $\|TT^*u\|_B \leq C^2\|u\|_{B'}$

Cet argument est appliqué avec $H = L^2(\mathbb{R}^n)$, $B = L^q(0,T;L^r(\mathbb{R}^n))$, $T(\varphi)(t,x) = (U(t)\varphi)(x)$, ce qui donne (par dualité $L^2(\mathbb{R}^{n+1})$)

$$T^*(f) = \int_{\mathbb{R}} U(-s)f(s,.)ds$$

et

$$TT^*(g) = \int_{\mathbb{R}} U(t-s)g(s,.)ds$$

cette dernière expression est égale à $(\Lambda g)(t,x)$ à une fonction de troncature en temps près.

Les inégalités du Théorème 2.3 sont encore vraies si $n > 2$ et $r = 2n/(n-2)$, mais la preuve, due à Keel et Tao (voir [42]) est beaucoup plus compliquée.

L'inégalité de dispersion s'étend aussi au cas où l'équation $i\partial_t u + \Delta u = 0$ est remplacée par $i\partial_t u + \Delta u + Vu = 0$, où V est un potentiel dépendant de x à valeurs réelles, lorsque V vérifie certaines conditions (notamment absence de résonnances en 0 et de valeur propre, voir [38], ou encore en présence de champ magnétique, voir [77]).

D'autres effets régularisants existent pour les équations de Schrödinger linéaires (voir par exemple [18],[64]), qui peuvent se révéler utiles pour traiter l'existence de solutions de problèmes non linéaires avec des termes contenant des dérivées de la solutions (voir [44]).

2.1.2 Le problème non linéaire

Ce problème a été étudié par de nombreux auteurs. Si les premiers résultats d'existence de solutions utilisant les inégalités de Strichartz sont dus à Ginibre et Velo ([30] et [31]), l'exposition faite ici est due à Kato [41]. Par soucis de simplicité d'exposition, on se restreint au cas d'un terme non linéaire puissance, i.e. on considère l'équation

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u + \lambda |u|^{2\sigma} u = 0, \\ u(0) = \varphi \end{cases} \tag{2}$$

où $\sigma \geq 0$ et $\lambda = \pm 1$. On considèrera en fait l'équation sous sa forme intégrale

$$u(t) = U(t)\varphi + i\lambda \int_0^t U(t-s)(|u|^{2\sigma}u)(s)ds. \tag{3}$$

Théorème 2.4 *Soit $\sigma \geq 0$, avec de plus $\sigma < 2/(n-2)$ si $n > 2$; alors si $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^n)$, il existe $T_*(\varphi) > 0$, $T^*(\varphi) > 0$ et une unique solution $u \in C(]-T_*, T^*[; H^1(\mathbb{R}^n))$ de l'équation (3); de plus, si $T^* < +\infty$ (resp. $T_* < +\infty$) alors $\lim_{t \nearrow T^*} \|u(t)\|_{H^1} = +\infty$ (resp. $\lim_{t \searrow -T_*} \|u(t)\|_{H^1} = +\infty$).*

A priori, T_* et T^* peuvent être différents, et u est aussi solution de l'équation (2) au sens des distributions.

La preuve se fait par itération, et point fixe sur l'équation (3) en utilisant les estimations de Strichartz. Plus précisément, on considère l'espace $X_T = L^\infty(0,T; L^2(\mathbb{R}^n)) \cap L^q(0,T; L^{2\sigma+2}(\mathbb{R}^n))$ où $(q, 2\sigma+2)$ forme une paire admissible. On pose également $Y_T = \{u \in X_T, \nabla u \in X_T\}$, et

$$(\mathcal{T}u)(t) = U(t)\varphi - \lambda\Lambda(|u|^{2\sigma}u)(t).$$

On remarque que d'après le Théorème 2.3, et le fait que ∇ commute avec $U(t)$ et Λ, $U(t)$ est borné de $H^1(\mathbb{R}^n)$ dans Y_T et Λ est borné de $L^{q'}(0,T; W^{1,2\sigma+2/(2\sigma+1)})$ dans Y_T avec des normes indépendantes de T. De plus, si $u, v \in L^\infty(0,T; L^{2\sigma+2})$ alors

$$\begin{aligned} &\||u|^{2\sigma}u - |v|^{2\sigma}v\|_{L^{q'}(0,T;L^{2\sigma+2/(2\sigma+1)})} \\ &\leq C(\|u\|^{2\sigma}_{L^\infty(0,T;L^{2\sigma+2})} + \|v\|^{2\sigma}_{L^\infty(0,T;L^{2\sigma+2})})\|u-v\|_{L^{q'}(0,T;L^{2\sigma+2})} \\ &\leq CT^\alpha(\|u\|^{2\sigma}_{L^\infty(0,T;L^{2\sigma+2})} + \|v\|^{2\sigma}_{L^\infty(0,T;L^{2\sigma+2})})\|u-v\|_{L^q(0,T;L^{2\sigma+2})} \end{aligned}$$

où $\alpha = \frac{1}{q'} - \frac{1}{q} = 1 - \frac{2}{q}$, en utilisant l'inégalité de Hölder. En particulier, les inégalités de Strichartz impliquent

$$\begin{aligned} &\|\mathcal{T}u - \mathcal{T}v\|_{X_T} \leq C\||u|^{2\sigma}u - |v|^{2\sigma}v\|_{L^{q'}(0,T;L^{2\sigma+2/(2\sigma+1)})} \\ &\leq CT^\alpha(\|u\|^{2\sigma}_{L^\infty(0,T;L^{2\sigma+2})} + \|v\|^{2\sigma}_{L^\infty(0,T;L^{2\sigma+2})})\|u-v\|_{L^q(0,T;L^{2\sigma+2})}. \end{aligned}$$

Puisque $H^1(\mathbb{R}^n) \subset L^{2\sigma+2}(\mathbb{R}^n)$, ceci montre déjà l'unicité de la solution dans la classe $L^\infty(0,T;H^1)$, mais pas l'existence puisque $L^\infty(0,T;H^1)$ n'est pas stable par $\mathcal{T}$. On montre alors que si

$R > 0$ est bien choisi, et si $T > 0$ est suffisamment petit, $\mathcal{T}$ envoie la boule B_R de Y_T dans elle même et est une contraction dans B_R pour la norme de X_T (en notant que B_R est bien fermée dans X_T). La deuxième assertion provient de l'inégalité précédente, puisque $\alpha > 0$ et $\|u\|_{L^\infty(0,T;L^{2\sigma+2})} \leq C\|u\|_{L^\infty(0,T;H^1)} \leq C\|u\|_{Y_T}$. Pour la première assertion, on remarque que, puisque $\sigma \geq 0$,

$$\begin{aligned}\|\nabla(|u|^{2\sigma}u)\|_{L^{q'}(0,T;L^{2\sigma+2/(2\sigma+1)})} &\leq C\|u\|^{2\sigma}_{L^\infty(0,T;L^{2\sigma+2})}\|\nabla u\|_{L^{q'}(0,T;L^{2\sigma+2})} \\ &\leq CT^\alpha\|u\|^{2\sigma}_{Y_T}\|\nabla u\|_{L^q(0,T;L^{2\sigma+2})} \leq CT^\alpha\|u\|^{2\sigma+1}_{Y_T}\end{aligned}$$

et donc en utilisant à nouveau les inégalités de Strichartz,

$$\|\mathcal{T}u\|_{Y_T} \leq \|U(t)\varphi\|_{Y_T} + \|\Lambda(|u|^{2\sigma}u)\|_{Y_T} \leq C_1\|\varphi\|_{H^1} + C_2T^\alpha\|u\|^{2\sigma+1}_{Y_T},$$

d'où le résultat en choisissant par exemple $R = 2C_1\|\varphi\|_{H^1}$ et T assez petit pour que $C_2T^\alpha R^{2\sigma} \leq \frac{1}{2}$. Ceci montre l'existence d'un unique point fixe, donc d'une solution. L'existence sur un intervalle de temps de la forme $[-T, 0]$ est obtenue de la même façon.

En général, $\mathcal{T}$ n'est pas une contraction pour la norme de Y, sauf restrictions sur σ ($\sigma \geq 1/2$ pour pouvoir dériver). L'utilisation d'une méthode de point fixe permet également d'obtenir, de manière tout à fait classique, la continuité par rapport à la donnée initiale (uniforme sur les boules de H^1). Dans le cas critique où $n \geq 3$ et $\sigma = \frac{2}{n-2}$, l'existence locale est toujours vraie (pour une taille arbitraire de donnée initiale, voir [15]) mais l'alternative sur le temps d'existence devient

$$T^* < +\infty \Rightarrow \max(\|u\|_{L^\infty(0,T^*;H^1)}, \|u\|_{L^q(0,T^*;W^{1,2\sigma+2})}) = +\infty.$$

On a également un résultat d'existence locale et unicité dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ si $0 \leq \sigma < 2/n$, avec $\lim_{t \nearrow T^*} \|u(t)\|_{L^2} = +\infty$ si $T^* < +\infty$; comme on verra plus loin que la norme L^2 est conservée, on a en fait existence globale dans ce cas. Ce résultat du à Tsutsumi (voir [69]) se montre par une méthode de contraction dans une boule de X_T en utilisant la proposition 2.3. Ce résultat est également valable pour $\sigma = 2/n$, mais là encore, l'alternative devient

$$T^* < +\infty \Rightarrow \max(\|u\|_{L^\infty(0,T^*;L^2)}, \|u\|_{L^q(0,T^*;L^{2\sigma+2})}) = +\infty.$$

La conservation de la norme L^2 dit alors que la première quantité reste finie, c'est donc la seconde qui devient infinie (ce cas se produit effectivement).

Il est également possible de montrer un résultat d'existence locale et d'unicité dans $H^s(\mathbb{R}^n)$ pour $0 \leq s \leq 1$ (voir [16]) en utilisant les espaces de Besov, avec des conditions adéquates sur σ en fonction de s. Enfin, il est possible de définir une notion de "criticalité au niveau s" pour l'existence locale : cela correspond au fait que l'équation (2) est invariante par la transformation de scaling $\psi(t, x) \mapsto \lambda^\theta\psi(\lambda^2 t, \lambda x)$ (donc $\theta = 1/\sigma$) et la norme de $\dot{H}^s$ est invariante par la dilatation $\varphi(x) \mapsto \lambda^\theta\varphi(\lambda x)$ (donc $\theta = n/2 - s$) pour le même paramètre θ. On obtient donc comme exposant critique au niveau s : $\sigma = 2/(n - 2s)$. On retrouve ainsi les exposants critiques H^1 et L^2.

2.2 L'équation de KdV généralisée

Contrairement à l'équation de NLS, pour laquelle les résultats d'existence et d'unicité locale démontrés à l'origine par Ginibre et Velo, puis par Tsutsumi dans L^2 se sont révélés optimaux (en ce qui concerne tout au moins les équations de NLS conservatives), l'équation de KdV (généralisée) a elle connu une évolution plus lente et des améliorations progressives sur la régularité demandée pour obtenir l'existence et l'unicité des solutions. Il existe actuellement des résultats d'existence globale et d'unicité dans des espaces de Sobolev d'exposants négatifs. Je me limiterai aux résultats permettant d'obtenir des solutions dans l'espace d'énergie. On considère donc l'équation

$$\partial_t u + \partial_x^3 u + \partial_x(u^p) = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

où p est un entier. Jusqu'en 1979, les seuls résultats concernant cette équation donnaient l'existence locale et l'unicité dans H^s avec $s > 3/2$, avec continuité par rapport à la donnée initiale (voir [8], [63]), par des méthodes qui ne tenaient pas compte de la dispersion. Puis Kato (voir [40]) a montré l'effet régularisant suivant, qui sera utilisé dans le cours d'Y. Martel.

Proposition 2.5 *On suppose $2 \leq p < 5$, et soit $u \in C([0,T]; H^s(\mathbb{R}))$ une solution de (4) avec $s \geq 1$. Alors pour tout $R > 0$, il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de R, T et $\|u(0)\|_{L^2}$ telle que*

$$\int_0^T \int_{-R}^R |\partial_x u(t,x)|^2 dx dt \leq C.$$

Cette inégalité s'obtient formellement de la manière suivante. On considère une fonction q, régulière et bornée ainsi que toutes ses dérivées sur $\mathbb{R}$, avec $q'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On multiplie alors (4) par qu et on intègre en x pour obtenir

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} qu^2 dx + \int_{\mathbb{R}} qu_{xxx} u dx + \int_{\mathbb{R}} qu(u^p)_x dx = 0.$$

Après plusieurs intégrations par parties,

$$\int_{\mathbb{R}} qu_{xxx} u dx = -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} q_{xxx} u^2 dx + \frac{3}{2}\int_{\mathbb{R}} q_x u_x^2 dx,$$

et le dernier terme s'écrit, également par intégration par parties

$$\int_{\mathbb{R}} qu(u^p)_x dx = -\frac{p}{p+1}\int_{\mathbb{R}} q_x u^{p+1} dx.$$

De plus, puisque $p+1 < 6$, pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver une constante $C(\varepsilon) > 0$ telle que $|u|^{p+1} \leq \varepsilon |u|^6 + C(\varepsilon)|u|^2$ et le dernier terme se majore par

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbb{R}} q_x u^{p+1} dx\right| \leq C\|u\|_{L^2}^2 + \varepsilon \int_{\mathbb{R}} q_x |u|^6 dx \\
&\leq C\|u\|_{L^2}^2 + \varepsilon \|u\|_{L^2}^2 \|q_x u^4\|_{L^\infty} \leq C\|u\|_{L^2}^2 + \frac{\varepsilon}{2}\|u\|_{L^2}^2 \|\partial_x(q_x^{1/2} u^2)\|_{L^1}^2 \\
&\leq C(1 + \|u\|_{L^2}^6) + 2\varepsilon \|u\|_{L^2}^4 \int_{\mathbb{R}} q_x u_x^2 dx;
\end{aligned}$$

La conservation de la norme L^2 (obtenue simplement en multipliant l'équation par u et en intégrant par parties) implique donc que

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} qu^2 dx \leq -(3-2\varepsilon\|u(0)\|_{L^2}^4)\int_{\mathbb{R}} q_x u_x^2 dx + C(1+\|u(0)\|_{L^2}^6).$$

Le résultat s'obtient en choisissant alors ε suffisamment petit, et en remarquant que q_x est minorée par une constante strictement positive sur tout intervalle $[-R,R]$.

Le premier résultat d'existence locale dans l'espace d'énergie a été montré par Kenig, Ponce et Vega (voir [43]).

Théorème 2.6 *Pour tout $\varphi \in H^1(\mathbb{R})$, il existe un temps $T^* > 0$ ne dépendant que de φ, et il existe un espace fonctionnel $X_T \subset C([0,T];H^1(\mathbb{R}))$ tel que (4) admet une unique solution $u \in X_T$ avec $u(0) = \varphi$, pour tout $T < T^*$; de plus, $\varphi \mapsto u$ est continue de $H^1(\mathbb{R})$ dans $C([0,T];H^1(\mathbb{R}))$ et si $T^* < +\infty$ alors $\lim_{t\nearrow T^*}\|u(t)\|_{H^1} = +\infty$.*

On peut evidemment également résoudre le problème localement en temps pour $t < 0$; l'unicité est à priori obtenue dans une classe plus petite que $C([0,T];H^1(\mathbb{R}))$, sauf pour $p=1$, où des résultats obtenus par d'autres méthodes, introduites par Bourgain, qui ont permis de montrer l'existence et l'unicité de solutions dans des classes moins régulières de distributions, permettent également de montrer l'unicité dans la classe $C([0,T];H^1(\mathbb{R}))$ (voir [10]).

Le théorème de Kenig, Ponce et Vega montre en fait l'existence de solutions dans l'espace $C([0,T];H^\sigma(\mathbb{R}))$ avec $\sigma < 1$ dépendant de la puissance p du terme non linéaire ($\sigma > 3/4$ pour $p=2$, $\sigma > 0$ pour $p=5$ et $\sigma > \sigma_c$ avec $\sigma_c \to 1/2$ quand $p \to +\infty$). Ceci permet en particulier de montrer la continuité de la solution par rapport à la donnée initiale pour la topologie faible de H^1.

La preuve du théorème utilise un argument de point fixe dans un espace $X_T^\sigma \subset C([0,T];H^\sigma)$ adapté à chaque puissance p et qui utilise les effets régularisants locaux de l'équation linéaire $\partial_t u + \partial_x^3 u = 0$ (équation de Airy), dont on note $u(t) = e^{-t\partial_x^3}\varphi$ la solution valant φ à $t=0$. Par exemple, pour $p=1$, l'espace utilisé est

$$X_T^\sigma = \big\{u \in C([0,T];H^\sigma(\mathbb{R})) \cap L^2(\mathbb{R}, L^\infty(0,T)),$$
$$D^\sigma\partial_x u \in L^\infty(\mathbb{R}, L^2(0,T)), \quad \partial_x u \in L^4(0,T;L^\infty(\mathbb{R}))\big\}$$

où $\widehat{D^\sigma u}(\xi) = |\xi|^\sigma \hat{u}(\xi)$. Les estimations utilisées sur l'équation linéaire sont :

- une estimation de type "Strichartz":

$$\left(\int_{\mathbb{R}} \|D^{1/4}e^{-t\partial_x^3}\varphi(x)\|_{L_x^\infty}^4 dt\right)^{1/4} \leq C\|\varphi\|_{L_x^2}$$

- une version précisée de l'effet régularisant de Kato exhibé dans la proposition précédente (et qui se généralise à tous les modèles 1-D dispersifs):

$$\int_{\mathbb{R}} |De^{-t\partial_x^3}\varphi(x)|^2 dt = C\|\varphi\|_{L_x^2}^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- deux estimations sur la fonction maximale $\sup_{t\in[-T,T]}|e^{-t\partial_x^3}\varphi|$:

$$\left(\int_{\mathbb{R}}\sup_{t\in[-T,T]}|e^{-t\partial_x^3}\varphi(x)|^2dx\right)^{1/2}\leq C(1+T)^\rho\|\varphi\|_{H^s}$$

et

$$\left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\sup_{x\in[j,j+1[}\sup_{t\in[-T,T]}|e^{-t\partial_x^3}\varphi(x)|^2\right)^{1/2}\leq C(1+T)^\rho\|\varphi\|_{H^s}$$

où $\rho>3/4$ et $s>3/4$.

La première estimation (Strichartz) montre que, au moins pour la solution u de l'équation linéaire, on a $\partial_x u\in L^1(0,T;L_x^\infty)$ dès que $\varphi\in H^{3/4}(\mathbb{R})$, ce qui explique le côté critique de $\sigma=3/4$ pour $p=2$. Il faut évidemment également utiliser les estimations correspondantes sur la solution de l'équation inhomogène. On renvoie à [43] pour les détails.

2.3 Invariances, conservations et globalisation des solutions

Les équations de NLS et KdV généralisées sont toutes les deux des systèmes hamiltoniens de dimension infinie, invariants par un groupe de transformation comprenant (pour ce qui est des transformations laissant invariant l'espace $H^1(\mathbb{R})$ ou $H^1(\mathbb{R}^n)$) :

- les translations espace-temps : si $u(t,x)$ est solution alors $u(t+t_0,x+x_0)$ l'est aussi.
- les transformations de jauge ou invariances de phase (pour NLS) : si $u(t,x)$ est solution alors aussi $e^{i\theta}u(t,x)$, pour $\theta\in\mathbb{R}$.
- l'invariance d'échelle: si (t,x) est solution alors $\lambda^{1/\sigma}u(\lambda^2t,\lambda x)$ (pour NLS) et $\lambda^{2/(p-1)}u(\lambda^3t,\lambda x)$ (pour KdV généralisée) aussi.

La théorie abstraite permet de déduire de ces symétries des lois de conservation (formelles) pour ces deux équations. Ces conservations peuvent être justifiées pour les solutions dans $C([0,T];H^1(\mathbb{R}))$ obtenues précédemment et peuvent permettre de globaliser les solutions dans certains cas.

Proposition 2.7 *Soit $u\in C([0,T];H^1(\mathbb{R}^n)$ une solution de (NLS) avec $u(0)=\varphi$. Alors*

$$E(u(t))=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u(t)|^2dx-\frac{\lambda}{2\sigma+2}\int_{\mathbb{R}^n}|u(t)|^{2\sigma+2}dx=E(\varphi),\tag{5}$$

et

$$m(u(t))=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}|u(t)|^2dx=m(\varphi).\tag{6}$$

De plus, le moment est également conservé :

$$\mathrm{Im}\int_{\mathbb{R}^n}\bar{u}(t)\nabla u(t)dx=\mathrm{Im}\int_{\mathbb{R}^n}\bar{\varphi}\nabla\varphi dx.$$

On déduit de cette proposition le corollaire suivant :

Corollaire 2.8 *Sous les hypothèses précédentes, si $\lambda < 0$, ou $\lambda > 0$ et $0 \leq \sigma < 2/n$, la solution obtenue dans le Théorème 2.4 est globale. De plus, il existe une constante $C(\|\varphi\|_{H^1})$ telle que $\|u(t)\|_{H^1} \leq C$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.*

De même, l'équation de KdV généralisée admet les conservations suivantes :

Proposition 2.9 *Soit $u \in C([0,T]; H^1(\mathbb{R}))$ une solution de (4) avec $u(0) = \varphi$; alors*

$$E(u(t)) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} (\partial_x u(t))^2 dx - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}} u^{p+1}(t)dx = E(\varphi) \tag{7}$$

et

$$m(u(t)) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} u^2(t)dx = m(\varphi). \tag{8}$$

De plus, si $\varphi \in H^3(\mathbb{R})$ et si l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx$ est définie, alors $\int_{\mathbb{R}} u(t,x)dx$ est définie pour tout temps et cette quantité est conservée au cours du temps.

De même que pour l'équation de NLS, ces conservations permettent d'obtenir l'existence globale des solutions lorsque la puissance du terme non linéaire n'est pas trop grande.

Corollaire 2.10 *Avec les mêmes notations que précédemment, si $p < 5$ alors les solutions de (4) avec donnée initiale dans $H^1(\mathbb{R})$ sont globales et bornées en norme H^1 par une constante ne dépendant que de $\|\varphi\|_{H^1}$.*

L'équation de NLS possède d'autres quantités conservées, liées à d'autres symétries de l'équation, mais qui ne préservent pas l'espace $H^1(\mathbb{R}^n)$. L'une de ces symétries est l'invariance de Galilée : si $u(t,x)$ est solution de (2), alors $u(t, x-\beta t)e^{i\beta/2(x-\beta t/2)}$ aussi, où $\beta \in \mathbb{R}^n$. L'équation de KdV généralisée ne possède, elle pas d'autre quantité conservée en général, sauf pour $p = 1$ ou 2 où il y a une infinité de lois de conservation (voir [46]). Tous les autres modèles donnés dans l'introduction possèdent une énergie et conservent la norme L^2 des solutions.

La preuve de la conservation de m pour les solutions de NLS est évidente, une fois que l'on a remarqué que les solutions obtenues dans le Théorème 2.4 ont une dérivée en temps continue à valeurs dans $H^{-1}(\mathbb{R}^n)$. On peut donc calculer

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 dx = 2\mathrm{Re}\,(\bar{u}, \partial_t u)_{H^1, H^{-1}} = -2\mathrm{Im}\,(\bar{u}, \Delta u) - 2\mathrm{Im}\,\lambda(\bar{u}, |u|^{2\sigma}u) = 0,$$

en intégrant par parties. La conservation de l'énergie s'obtient formellement en multipliant l'équation (2) par $\Delta\bar{u} + \lambda|u|^{2\sigma}\bar{u}$, en intégrant sur $\mathbb{R}^n$ et en prenant la partie réelle. Ce calcul formel se justifie, par exemple, en utilisant une procédure de troncature-régularisation de la solution, puis en passant à la limite dans l'égalité obtenue pour les intégrales régularisées. La preuve des conservations pour l'équation de KdV généralisée est similaire.

En ce qui concerne la globalisation des solutions à l'aide de la conservation de l'énergie, le cas $\lambda < 0$ dans l'équation de NLS est tout a fait évident car clairement, $\|u(t)\|_{H^1}^2 \leq 2E(u(t))$

dans ce cas, et donc $T^* = +\infty$. Si $\lambda > 0$ et $\sigma < 2/n$, on utilise l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg suivante : il existe une constante $C(\sigma, n) > 0$ telle que pour tout $v \in H^1(\mathbb{R}^n)$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |v|^{2\sigma+2} dx \leq C(\sigma, n) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^2 \right)^{\frac{n\sigma}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |v|^2 \right)^{(1-\frac{n}{2})\sigma+1}. \tag{9}$$

On obtient alors, avec la conservation de l'énergie et de la norme L^2:

$$\frac{1}{2} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(t)|^2 - c(\|\varphi\|_{L^2}) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(t)|^2 \right)^{n\sigma/2} \right] \leq E(u(t)) = E(\varphi) \tag{10}$$

d'où la borne $\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(t)|^2 dx \leq M(\|\varphi\|_{L^2}, E(\varphi))$ lorsque $n\sigma/2 < 1$ i.e. $\sigma < 2/n$, qui jointe une fois encore à la conservation de la norme L^2 permet de conclure. La preuve est exactement la même pour l'équation de KdV généralisée : elle correspond au cas $n = 1$ et $p = 2\sigma + 1$.

L'inégalité de Gagliardo-Nirenberg (9) et la conservation de l'énergie montrent que dans le cas critique, i.e. pour $\sigma = 2/n$, l'existence est globale si $\|\varphi\|_{L^2}$ est suffisamment petite. On peut en fait quantifier plus précisément de combien cette quantité doit être petite, en fonction de la norme L^2 de "l'état fondamental", i.e. de l'unique solution radiale et positive de l'équation

$$-\Delta Q + Q - Q^{2\sigma+1} = 0 \tag{11}$$

dont on parlera plus précisément au paragraphe 3.

Proposition 2.11 *Soit $\sigma = 2/n$ et supposons $\|\varphi\|_{L^2} < \|Q\|_{L^2}$ où Q est défini ci-dessus. Alors la solution de l'équation (2) est définie globalement sur $\mathbb{R}$. Le même résultat est vrai pour l'équation de KdV généralisée avec $p = 5 = 2\sigma + 1$, et Q défini de la même façon.*

La preuve de ce résultat, du à Weinstein (voir [73]), consiste à chercher la meilleure constante dans l'inégalité (9), en minimisant la fonctionnelle

$$J_{\sigma,n}(v) = \frac{\|\nabla v\|_{L^2}^{\sigma n} \|v\|_{L^2}^{2+\sigma(2-n)}}{\|v\|_{L^{2\sigma+2}}^{2\sigma+2}}, \quad v \in H^1(\mathbb{R}^n).$$

On montre que ce minimum, qui vaut clairement $1/C(\sigma, n)$ est atteint par la fonction Q précédente. Le lemme suivant (identités de Pohozaev) permet alors d'exprimer $J_{\sigma,n}(Q)$ uniquement en termes de $\|Q\|_{L^2}$.

Lemme 2.12 *Si $Q \in H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^{2\sigma+2}(\mathbb{R}^n)$, à valeurs réelles, est solution de (11), alors*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla Q|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} Q^2 dx - \int_{\mathbb{R}^n} Q^{2\sigma+2} dx = 0,$$

et

$$(1 - \frac{n}{2}) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla Q|^2 dx - \frac{n}{2} \int_{\mathbb{R}^n} Q^2 dx + \frac{n}{2\sigma + 2} \int_{\mathbb{R}^n} Q^{2\sigma+2} dx = 0.$$

La première inégalité est obtenue en multipliant l'équation (11) par Q et en intégrant par parties, la seconde est obtenue (formellement) en multipliant l'équation (11) par $x.\nabla Q$ et en intégrant là encore par parties.

De ces deux inégalités, il est facile de déduire que lorsque $\sigma = 2/n$, $J_{\sigma,n}(Q) = \frac{n}{n+2}\|Q\|_{L^2}^{4/n}$ et donc $C(\sigma, n) = \frac{n+2}{n}\|Q\|_{L^2}^{-4/n}$. Ainsi, l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg avec meilleure constante s'écrit

$$\frac{1}{\sigma+1}\int_{\mathbb{R}^n}|v|^{2\sigma+2}dx \leq \frac{\|v\|_{L^2}^{4/n}}{\|Q\|_{L^2}^{4/n}}\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla v|^2 dx \tag{12}$$

dont on déduit que si $u(t)$ est solution de NLS, avec $\lambda = 1$ et $\sigma = 2/n$, alors

$$E(u(t)) \geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\|u(t)\|_{L^2}^{4/n}}{\|Q\|_{L^2}^{4/n}}\right)\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u(t)|^2 dx = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\|\varphi\|_{L^2}^{4/n}}{\|Q\|_{L^2}^{4/n}}\right)\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u(t)|^2 dx.$$

Ceci implique en particulier qu'une solution de norme L^2 petite ($\|\varphi\|_{L^2} < \|Q\|_{L^2}$) a une énergie strictement positive.

2.4 Explosion en temps fini pour NLS

Les résultats précédents sont optimaux dans le sens où l'on ne s'attend pas, dans les cas opposés $\sigma \geq 2/n$ et $\lambda = 1$ pour NLS, $p \geq 5$ pour KdV généralisée, à ce que les solutions soient toutes globales. L'existence effective de solutions présentant des singularités en temps fini est démontrée dans tous les cas, critique et surcritiques pour NLS, mais seulement dans le cas critique $p = 5$ pour KdV (voir [52] et [55] pour des résultats dans ce dernier cas).

Dans le cas critique de NLS i.e. $\sigma = 2/n$ on sait de plus construire une solution explicite qui explose en temps fini, et de masse $\|\varphi\|_{L^2} = \|Q\|_{L^2}$, ce qui montre à quel point le résultat de la Proposition 2.11 est optimal. Cette solution est obtenue en utilisant la transformée pseudo-conforme suivante : si $u(t, x)$ est solution de NLS, $\sigma = 2/n$ et $a \in \mathbb{R}$, alors on vérifie que

$$v(t, x) = \frac{1}{(1+at)^{n/2}}e^{\frac{ia|x|^2}{4(1+at)}}u(\frac{t}{1+at}, \frac{x}{1+at})$$

est aussi une solution, tant que cette fonction est définie. On note que si $u \in \Sigma$, où

$$\Sigma = \{u \in H^1(\mathbb{R}^n), \quad xu \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

alors $v \in H^1(\mathbb{R}^n)$. On applique alors cette transformation à la solution particulière $Q(x)e^{it}$ (appelée état stationnaire de NLS) avec par exemple $a = -1$, pour obtenir une solution de la forme

$$v(t, x) = \frac{1}{(1-t)^{n/2}}e^{-i|x|^2/4(1-t)+it/(1-t)}Q(\frac{x}{1-t}).$$

Or Q est exponentiellement décroissante à l'infini ($Q(x) \sim Ce^{-|x|}$ quand $|x| \to +\infty$) donc en particulier $Q \in \Sigma$ et v est bien une solution H^1 de NLS pour $0 \leq t < 1$; de plus,

$$\|\nabla v(t)\|_{L^2}^2 = \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^n}|x|^2 Q^2(x)dx + \frac{1}{(1-t)^2}\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla Q(x)|^2 dx.$$

Ainsi, v explose au temps $t = 1$ avec la vitesse

$$\|\nabla v(t)\|_{L^2} \sim \frac{1}{(1-t)}\|\nabla Q\|_{L^2}, \text{ quand } t \to 1.$$

Enfin, $\|v(t)\|_{L^2} = \|Q\|_{L^2}$, montrant ainsi l'optimalité du résultat de la Proposition 2.11.

La transformée pseudo-conforme est reliée à une loi de conservation qui n'est plus une conservation exacte lorsque $\sigma \neq 2/n$, mais qui permet tout de même d'exhiber facilement des critères d'explosion lorsque $\sigma > 2/n$, ou $\sigma = 2/n$ et $\|v\|_{L^2} > \|Q\|_{L^2}$; on montre en effet la proposition suivante, dont l'argument formel est du à Zakharov, ou Vlasov, Petrichev et Talanov (voir [79], [71]) et qui a été par la suite justifié par Glassey ([32]).

Proposition 2.13 *Soit $\varphi \in \Sigma$ et $u \in C(]-T_*, T^*[; H^1(\mathbb{R}^n))$ la solution de NLS obtenue dans le théorème 2.4. Alors $u \in C(]-T_*, T^*[; \Sigma)$ et si $V(t) = \int_{\mathbb{R}^n} |x|^2|u(t)|^2dx$, alors V est de classe C^2 sur $]-T_*, T^*[$ avec*

$$V''(t) = 16E(\varphi) + 4\lambda\frac{(2-n\sigma)}{\sigma+1}\int_{\mathbb{R}^n} |u(t)|^{2\sigma+2}dx.$$

On en déduit:

Corollaire 2.14 *Soit $\lambda = 1$ et $\sigma \geq 2/n$, alors si $\varphi \in \Sigma$ vérifie $E(\varphi) < 0$, la solution $u(t) \in C(]-T_*, T^*[, \Sigma)$ obtenue dans la Proposition 2.13 ci-dessus explose en temps fini, i.e. T^*, $T_* < +\infty$.*

En effet, pour $\lambda = 1$ et $\sigma \geq 2/n$, le second terme dans l'inégalité de la Proposition 2.13 est négatif ou nul. Cette inégalité s'intègre alors en

$$V(t) \leq 8E(\varphi)t^2 + V'(0)t + V(0)$$

avec $V'(0) = 2\mathrm{Im}\int_{\mathbb{R}^n} x.\nabla\varphi\bar{\varphi}dx$, et puisque $E(\varphi) < 0$, le membre de droite prend des valeurs négatives en temps (positif ou négatif) fini; or la quantité $V(t)$ reste positive tant qu'elle est définie, montrant ainsi que la solution ne peut pas exister pour tout temps.

En considérant plus précisément le polynôme en t du membre de droite de l'inégalité ci-dessus, on généralise facilement la condition d'explosion aux fonctions φ de Σ vérifiant

- $E(\varphi) = 0$ et $\mathrm{Im}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} x.\nabla\varphi\bar{\varphi}dx < 0$
- $E(\varphi) > 0$ et $\mathrm{Im}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} x.\nabla\varphi\bar{\varphi}dx \leq -4\sqrt{2}\left(E(\varphi)\int_{\mathbb{R}^n}|x|^2|\varphi|^2dx\right)^{1/2}$.

Il est clair que l'on peut effectivement construire des fonctions φ de Σ vérifiant l'une de ces conditions : par exemple, pour obtenir une fonction d'énergie négative, il suffit de considérer pour $\varphi \in \Sigma$ donnée, $\mu\varphi$ avec $\mu > 0$ assez grand.

Dans certains cas, la condition $\varphi \in \Sigma$ peut être relaxée. C'est le cas si $n = 1$ (voir [58]) ou si bien φ est radiale (voir [57]), auxquels cas la condition $\varphi \in H^1$ d'énergie négative suffit à obtenir l'explosion; la peuve est alors obtenue par un argument de regularisation-troncature de la fonction $x \mapsto |x|^2$.

La condition $E(\varphi) < 0$ implique que φ est "suffisamment grande". Cependant, il existe également des solutions globales de norme L^2 arbitrairement grande (voir [17]). L'argument de viriel ci-dessus a l'avantage d'être assez "stable"; il reste en effet valable si on perturbe l'équation par un terme de force (eventuellement aléatoire, sous certaines conditions, voir [23]) ou par certains type de potentiels (là encore qui peuvent être aléatoires, voir [32] et [24]). Dans le cas strictement surcritique, i.e. $\sigma > 2/n$, c'est d'ailleurs le seul argument disponible pour montrer l'existence de solutions qui explosent en temps fini. Il a par contre l'énorme inconvénient de ne donner aucune information qualitative sur cette explosion : le temps d'explosion n'est même pas en général celui donné par l'argument de Viriel.

L'étude qualitative de l'explosion en temps fini est beaucoup plus avancée dans le cas critique $\sigma = 2/n$, qui possède plus de propriétés d'invariances. De plus, le phénomène qualitatif de l'explosion est sans doute totalement différent dans le cas surcritique de ce qu'il est dans le cas critique, comme en témoigne le phénomène d'instabilité des ondes solitaires (voir le paragraphe 3). Dans le cas critique, en effet, on a le fait important suivant :

Proposition 2.15 *Supposons $\sigma = 2/n$; si $v \in H^1(\mathbb{R}^n)$ est tel que $\|v\|_{L^2} = \|Q\|_{L^2}$ et $E(v) = 0$, alors il existe des paramètres $\lambda_0 > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, et $\gamma_0 \in \mathbb{R}$ tels que*

$$v(x) = \lambda_0^{n/2} Q(\lambda_0 x + x_0) e^{i\gamma_0}.$$

La preuve de ce résultat repose sur un argument de concentration compacité, et a été utilisée par Weinstein (voir [74]) pour montrer que dans le cas critique, toute explosion "de masse critique" i.e. avec une donnée initiale vérifiant $\|\varphi\|_{L^2} = \|Q\|_{L^2}$ était nécessairement autosimilaire, aux changements de phase et translations près, i.e. que la solution vérifie, toujours aux changements de phase et translations près,

$$u(t,x) \underset{t \nearrow T^*}{\longrightarrow} \frac{1}{(\lambda(t))^{n/2}} Q\left(\frac{x}{\lambda(t)}\right), \quad \text{avec } \lambda(t) = \frac{\|\nabla Q\|_{L^2}}{\|\nabla u(t)\|_{L^2}}.$$

Ce résultat a ensuite été précisé par Merle [54] qui a montré que les seules solutions explosives possédant une masse critique étaient les solutions explicites obtenues à l'aide de la tranformée pseudo-conforme. Des détails sur cette situation seront donnés dans le cours de P. Raphaël, ainsi que des résultats, toujours dans le cas critique $\sigma = 2/n$, concernant l'explosion des solutions "proches de la masse critique" i.e. possédant une norme L^2 supérieure (puisque sinon l'existence est globale) mais proche de celle de Q. Ces résultats confirment les nombreux calculs numériques existant sur le sujet (voir les références données dans [68]).

3 Les ondes solitaires

L'intérêt que portent les physiciens et modélisateurs aux équations non linéaires dispersives est sans doute du à l'existence pour ces équations d'ondes solitaires, i.e. de solutions se propageant à vitesse constante sans changement de forme. La première observation dans la "nature" de ce phénomène est sans doute l'experience vécue par J. Scott-Russel, en 1834 avec une onde solitaire se propageant à la surface d'un canal; cependant, les ondes solitaires ont également une grande importance physique pour l'équation de NLS, entre autres dans le domaine des télécommunications et de la transmissions de signaux par fibres optiques.

L'étude de la stabilité de ces solutions particulières a débuté dans les années 1970 avec les travaux de Zakharov et de Vakhitov et Kolokolov sur la stabilité linéaire de NLS (voir [78], [70]) et ceux de Benjamin sur la stabilité non linéaire de KdV (voir [1]). Cependant, même si l'étude de la stabilité locale (i.e. pour des données initiales proches de l'onde solitaire) a fait de très net progrès ces dernières années (voir les cours de P. Raphaël et d'Y. Martel), le problème est encore loin d'être totalement résolu – sauf peut être dans les cas intégrables, pour KdV avec $p = 1$ ou 2, et NLS cubique ($\sigma = 1$) en dimension un – en ce qui concerne la stabilité globale, i.e. la résolution asymptotique en ondes solitaires pour toute donnée initiale suffisamment régulière et localisée, ce qui est une conjecture générale pour ces équations.

On s'intéressera ici uniquement aux ondes solitaires localisées, dont l'amplitude tend vers 0 à l'infini dans toutes les directions, même s'il y aurait beaucoup à dire dans les autres cas (et surtout beaucoup de problèmes ouverts à énoncer).

3.1 Existence et propriétés des ondes solitaires

Pour l'équation de KdV, les ondes solitaires sont des ondes progressives, de la forme $u_c(t,x) = Q_c(x-ct)$, où la vitesse c est constante. Le problème de l'existence et de l'unicité est alors facilement résolu, car en reportant l'expression de u_c dans l'équation de KdV, on obtient l'équation differentielle ordinaire

$$-cQ_c' + Q_c''' - (Q_c^p)' = 0$$

et en supposant que $Q_c(x)$ et $Q_c''(x)$ tendent vers 0 lorsque $x \to \pm\infty$, cette équation s'intègre en

$$-cQ_c + Q_c'' + Q_c^p = 0. \tag{13}$$

Il n'est pas difficile de voir que c doit être strictement positif pour que cette équation admette une solution qui tend vers 0 à l'infini, et qu'alors cette solution est unique, aux translations près (et aussi aux transformations $Q \mapsto -Q$ près si p est impair), et s'écrit explicitement sous la forme $Q_c(x-x_0)$, où $Q_c(x) = c^{1/(p-1)}Q(\sqrt{c}x)$, avec $Q = Q_1$ donnée par

$$Q(x) = \left(\frac{p+1}{2\cosh^2(\frac{p-1}{2}x)}\right)^{1/p-1};$$

on obtient ainsi une famille à deux paramètres (c, x_0) d'ondes solitaires. De plus, on retrouve le fait que $Q_c \sim C_p e^{-\sqrt{c}x}$ quand $x \to +\infty$, ce qui pouvait se lire directement sur l'équation. Le problème de l'existence et de l'unicité est donc réglé pour l'équation de KdV généralisée.

Pour NLS, les ondes solitaires sont plutôt des états stationnaires, avec une vitesse angulaire constante, de la forme $u_\omega(t,x) = e^{i\omega t}\varphi_\omega(x)$. La dénomination "état stationnaire " provient du fait que $|u_\omega|^2$ (l'intensité du champ electrique en optique) reste constant au cours du temps. La fonction φ_ω vérifie alors l'équation elliptique

$$-\Delta\varphi + \omega\varphi - \lambda|\varphi|^{2\sigma}\varphi = 0. \tag{14}$$

On remarque également que si φ_ω est solution de (14), alors par les symétries de l'équation, notamment la transformation de Galilée, la famille à $2n+2$ paramètres donnée par

$$u_{\omega,v}^{x_0,\theta}(t,x) = \varphi_\omega(x - 2vt - x_0)e^{i(v.x - v^2t + \omega t + \theta)}$$

est solution de NLS. On a ainsi une famille à $2n+2$ paramètres d'ondes solitaires : $v \in \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\omega > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$. Si de plus $\sigma = 2/n$, l'ajout de l'invariance pseudo-conforme fournit une famille à $2n+4$ paramètres de solutions.

En dimension un, l'équation (14) se réduit à l'équation (13) (si φ_ω est à valeurs réelles), et on peut donc facilement montrer que la solution est là encore unique aux translations et transformations de jauge près, et donnée par $\varphi_\omega(x) = e^{i\theta}Q_\omega(x - x_0)$, $\theta \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. En dimension supérieure, la solution n'est plus unique; cependant il existe des solutions plus particulièrement interessantes appelées états fondamentaux (par analogie avec le cas d'une particule quantique dans un potentiel) : en effet, une solution de (14) est un point critique de la fonctionnelle d'"action" définie par

$$S_\omega(\varphi) = E(\varphi) + \frac{\omega}{2}\int_{\mathbb{R}^n}|\varphi|^2dx = E(\varphi) + \omega m(\varphi). \tag{15}$$

Un état fondamental est alors une solution de (14) qui minimise l'action S_ω parmi toutes les solutions de (14). Les identités de Pohozaev du Lemme (2.12) permettent de cerner les cas où de telles solutions ne peuvent pas exister.

Proposition 3.1 *Il n'existe pas de solution localisée de (14) (dans $H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^{2\sigma+2}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n)$) si*

- $\lambda = -1$ *(équation défocalisante)*
- $\lambda = +1$, $\sigma \geq 2/(n-2)$*et* $\omega \geq 0$
- $\lambda = +1$, $\sigma \leq 2/(n-2)$ *et* $\omega \leq 0$*;*
- *de plus, il n'existe pas de solution radiale localisée de (14) si* $\lambda = +1$, $\omega \leq 0$ *et* $\sigma > 2/(n-2)$.

On se restreint donc dans toute la suite au cas $\lambda = +1$, $\omega > 0$ et $\sigma < 2/(n-2)$. En utilisant des méthodes classiques de régularité elliptique (bootstrap) on montre que toute solution de (14) dans $H^1(\mathbb{R})$ est en réalité dans $W^{2,q}(\mathbb{R}^n) \cap C^2(\mathbb{R}^n)$ pour tout q avec $2 \leq q < +\infty$ et décroît exponentiellement lorsque $|x| \to +\infty$. Pour les solutions radiales, le taux de décroissance exponentiel est donné par $Ce^{-\sqrt{\omega}|x|}$; φ_ω est en effet dans ce cas solution d'une équation différentielle ordinaire pour laquelle on applique les théorèmes classiques de comportement à l'infini.

Plusieurs méthodes sont disponibles pour montrer l'existence d'un état fondamental. La fonctionnelle d'action S_ω donnée par (15) n'est bien entendu ni minorée ni majorée sur $H^1(\mathbb{R}^n)$. On ne peut donc pas espérer montrer l'existence d'extréma globaux. Cependant, des techniques de type lemme du col fonctionnent très bien (voir [76]). Une autre approche variationnelle consiste à résoudre un problème de minimisation sous contraintes. Considérons par exemple le problème

$$I_\mu = \inf \left\{ \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^2 dx,\ v \in H^1(\mathbb{R}^n),\ -\frac{\omega}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |v|^2 dx + \frac{1}{2\sigma+2}\int_{\mathbb{R}^n} |v|^{2\sigma+2} dx = \mu \right\}$$

avec $\mu > 0$ si $n \geq 3$ et $\mu = 0$ si $n = 2$. L'identité de Pohozaev implique en effet que toute solution de (14) vérifie en dimension 2

$$-\frac{\omega}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |v|^2 + \frac{1}{2\sigma+2}\int_{\mathbb{R}^n} |v|^{2\sigma+2} dx = 0.$$

Si $\psi \in H^1(\mathbb{R}^n)$ est un minimum de I_μ, alors il existe un réel θ tel que

$$-\Delta\psi + \theta\omega\psi - \theta|\psi|^{2\sigma}\psi = 0;$$

on peut alors montrer que $\theta > 0$ et $\varphi_\omega = \psi(\frac{\cdot}{\theta})$ est donc solution de (14). De plus, on obtient ainsi tous les états fondamentaux de (14) (voir [5] ou [13]). La principale difficulté de cette méthode est due au manque de compacité; pour palier à cette difficulté, on peut soit utiliser la symétrisation de Schwarz pour se ramener au cas radial, puis utiliser un lemme classique qui dit que si $v \in L^2(\mathbb{R}^n)$ est à symétrie radiale, et décroissante, alors $|v(x)| \leq C_n|x|^{-n/2}\|v\|_{L^2}$, soit utiliser un argument de "concentration-compacité" (voir [47]). On peut d'autre part montrer le résutat suivant :

Proposition 3.2 *Tout état fondamental φ_ω de (NLS) est, à translation et transformation de jauge près, une solution radiale et positive de (14), i.e. il existe $\theta \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tels que $e^{i\omega t}\varphi_\omega(. - x_0)$ est radiale et positive.*

La preuve du fait que φ_ω est à valeurs réelles, à une transformation de jauge près, est relativement simple: la caractérisation variationnelle des états fondamentaux et l'inégalité de Harnack permettent de montrer que φ_ω ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^n$ et que sa phase est constante (ne dépend pas de x.) On peut donc supposer $\varphi_\omega > 0$ sur $\mathbb{R}^n$. Un résultat général de Gidas-Ni et Nirenberg (voir [29]) sur les équations elliptiques dans $\mathbb{R}^n$, et basé également sur le principe du maximum, permet d'affirmer que toute solution positive de (14) est à symétrie radiale.

Une autre méthode, due à Lopes (voir [49]) et valable également – contrairement à celle de [29] – pour les systèmes, consiste, pour obtenir la symétrie radiale à utiliser la caractérisation variationnelle; on montre alors qu'en symétrisant φ_ω par rappport à un hyperplan bien choisi (mais de direction quelconque), on a toujours un minimum de I_μ, et ce minimum est égal à φ_ω par un théorème de prolongement unique.

Une méthode alternative pour obtenir l'existence d'une solution de (14) consiste à résoudre le problème sur la boule $B(0, R)$ de $H^1(\mathbb{R}^n)$, avec des conditions de Dirichlet au bord, puis à faire tendre R vers $+\infty$ (voir [4]).

Enfin une dernière méthode consiste à s'interesser directement à l'équation différentielle obtenue en supposant que la solution cherchée est à symétrie radiale, et positive, soit

$$\varphi'' + \frac{n-1}{r}\varphi' - \omega\varphi + \varphi^{2\sigma+1} = 0, \quad \varphi = \varphi(r), \quad r = |x|, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{16}$$

Pour obtenir $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^n)$, on doit necessairement supposer $\varphi'(0) = 0$. La méthode de tir consiste alors à chercher un réel $\alpha > 0$ tel que la solution de (16) avec $\varphi(0) = \alpha$ et $\varphi'(0) = 0$ reste positive sur $\mathbb{R}^{+*}$ et tende vers 0 à l'infini (l'ensemble des valeurs α qui conviennent est alors l'ensemble des valeurs pour lesquelles ni la solution ni sa dérivée ne s'annulent sur $\mathbb{R}^{+*}$, voir [6]).

La même méthode a été utilisée par Kwong – avec des arguments de type Sturm-Liouville plus poussés pour montrer l'unicité de la solution radiale et positive (voir [45] ou [53]). Finalement, le résultat d'existence et d'unicité peut s'énoncer comme suit:

Théorème 3.3 *On suppose $\omega > 0$, $\sigma < 2/(n-2)$, et $\lambda = +1$. Alors l'équation (14) admet un unique état fondamental, i.e. il existe une unique solution Q_ω radiale et positive de* (14)*, et si φ est une autre solution de (14) qui minimise S_ω parmi les solutions de (14), alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tels que $\varphi(x) = e^{i\theta}Q_\omega(x - x_0)$. De plus, $Q_\omega(x) = \omega^{1/2\sigma}Q_1(\sqrt{\omega}x)$ où $Q_1 = Q$ est l'unique solution radiale et positive de (11).*

3.2 Stabilité et instabilité des états fondamentaux par caractérisation variationnelle

On rappelle que si $Q_\omega(x) = \omega^{1/2\sigma}Q(\sqrt{\omega}x)$ est l'état fondamental de NLS, alors on a une famille à $2n+2$ paramètres de solutions données par

$$u_{\omega,v}^{x_0,\theta}(t,x) = Q_\omega(x - 2vt - x_0)e^{i(v.x - v^2t + \omega t + \theta)},$$

$\theta \in \mathbb{R}$, $\omega > 0$, $v \in \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Au vu de cette expression, il est clair qu'une légère perturbation de la solution $u_\omega(t,x) = e^{i\omega t}Q_\omega(x)$ dans la direction des paramètres $v \in \mathbb{R}^n$ ou $\omega > 0$ va induire une croissance linéaire de la phase (pour ω) ou du paramètre de translation (pour v). Ceci montre que la bonne notion de stabilité à regarder (qui correspond à la notion de stabilité orbitale pour la famille ci-dessus) est la suivante :

Définition 3.4 *L'état stationnaire $e^{i\omega t}Q_\omega$ est stable dans $H^1(\mathbb{R}^n)$ si pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver une constante $\delta > 0$ telle que si la donnée initiale φ vérifie $\|\varphi - Q_\omega\|_{H^1} \leq \delta$ alors $\inf_{\gamma\in\mathbb{R}} \inf_{y\in\mathbb{R}^n} \|u(t,.) - e^{i\gamma}Q_\omega(. - y)\|_{H^1} \leq \varepsilon$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, où $u(t,x)$ est la solution de (NLS) avec $u(0,x) = \varphi(x)$.*

L'utilisation du théorème des fonctions implicites montre que cette définition est équivalente à l'existence, lorsque $\|\varphi - Q_\omega\|_{H^1} \leq \varepsilon$, de deux fonctions $x(t)$ et $\gamma(t)$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, telles que $\|u(t,x) - e^{i\gamma(t)}Q_\omega(. - x(t))\|_{H^1} \leq \varepsilon$.

D'autre part, tout élément de la famille à $2n+2$ paramètres ci-dessus se ramène à un état stationnaire (i.e. $v = 0$, $x_0 = 0$, $\theta = 0$) par utilisation de l'invariance de Galilée, l'invariance par translation en x et l'invariance de jauge. Ainsi, la stabilité de l'état stationnaire $e^{i\omega t}Q_\omega$ se traduit par la stabilité de toute la famille à $2n+2$ paramètres qui en est issue, dans un certain sens. On remarque également qu'au vu de la caractérisation des états fondamentaux donnée dans le Théorème 3.3, il est équivalent de montrer que $e^{i\omega t}Q_\omega$ est stable, ou que l'ensemble $\mathcal{G}_\omega$ des états fondamentaux est stable au sens suivant : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $\delta > 0$ telle que

$$\|\varphi - Q_\omega\|_{H^1} \le \delta \Rightarrow \inf_{\psi\in\mathcal{G}_\omega} \|u(t,x) - \psi\|_{H^1} \le \varepsilon$$

où $u(t,x)$ est la solution de (NLS) avec $u(0,x) = \varphi(x)$.

Théorème 3.5 *On suppose $\sigma < 2/n$; alors l'ensemble des états fondamentaux de (NLS) est stable.*

La preuve de la stabilité sous cette forme, i.e. en utilisant la caractérisation variationnelle des états fondamentaux, est due à Cazenave et Lions (voir [14]). On indiquera une autre méthode pour obtenir la stabilité dans le paragraphe suivant.

On remarque d'abord que, d'après le Théorème 3.3, si $\psi \in \mathcal{G}_\omega$ alors $\|\psi\|_{L^2} = \|Q_\omega\|_{L^2}$ et que $E(\psi) = E(Q_\omega)$. De plus, par Pohozaev (voir le Lemme 2.12), on obtient facilement

$$E(Q_\omega) = \frac{n\sigma - 2}{2(2-(n-2)\sigma)} \int_{\mathbb{R}^n} |Q_\omega|^2 dx < 0 \quad \text{si} \quad \sigma < \frac{2}{n}.$$

Soit alors

(17) $$I_\mu = \inf\left\{E(v),\ v \in H^1(\mathbb{R}^n),\ \|v\|_{L^2} = \|Q_\omega\|_{L^2} = \mu\right\}.$$

Le lemme suivant se démontre en utilisant le principe de concentration-compacité (voir [47] ou [14]).

Lemme 3.6 *On suppose $\sigma < 2/n$; alors*

(i) $-\infty < I_\mu < 0$

(ii) si $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions de $H^1(\mathbb{R}^n)$ vérifiant $\lim_{m\to+\infty}\|u_m\|_{L^2} = \mu$ et $\lim_{m\to+\infty} E(u_m) = I_\mu$ alors il existe une sous suite $(u_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$, une famille $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ tels que $u_{m_k}(.-y_k)$ converge fortement dans $H^1(\mathbb{R}^n)$ vers une fonction u. En particulier, u est un minimum de (17).

Mais d'autre part, on montre facilement que les seules solutions du problème de minimisation précédent sont les états fondamentaux: en effet si u est un minimum de (17), il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

(18) $$-\Delta u + \theta u - |u|^{2\sigma}u = 0;$$

De l'équivalent du Lemme 2.12 pour l'équation (18), on déduit que

$$E(u) = \frac{(n\sigma-2)\theta}{2(2-(n-2)\sigma)} \int_{\mathbb{R}^n} |Q_\omega|^2 dx \le E(Q_\omega) = \frac{(n\sigma-2)\omega}{2(2-(n-2)\sigma)} \int_{\mathbb{R}^n} |Q_\omega|^2 dx < 0,$$

et donc $\theta \ge \omega$. Mais d'autre part $\tilde{u}_\theta(x) = (\frac{\theta}{\omega})^{-1/2\sigma} u(\sqrt{\frac{\omega}{\theta}}.)$ est solution de (14) et donc $S_\omega(Q_\omega) \le S_\omega(\tilde{u}_\theta)$ puisque Q_ω est un état fondamental, et donc minimise l'action (15) parmi toutes les solutions de (14). Or toujours à l'aide de Pohozaev, il est facile d'obtenir $S_\omega(Q_\omega) =$

$\frac{2\sigma\omega^{n/2-1/\sigma}}{2-(n-2)\sigma}\int_{\mathbb{R}^n} Q_\omega^2 dx$ et $S_\omega(\tilde{u}_\theta) = \frac{2\sigma\omega^{n/2-1/\sigma}}{2-(n-2)\sigma}\|\tilde{u}_\theta\|_{L^2}^2$ puisque $\tilde{u}_\theta$ est aussi solutions de (14). D'où $\|Q_\omega\|_{L^2}^2 \leq \|\tilde{u}_\theta\|_{L^2}^2 = (\frac{\theta}{\omega})^{n/2-1/\sigma}\|u\|_{L^2}^2 = (\frac{\theta}{\omega})^{n/2-1/\sigma}\|Q_\omega\|_{L^2}^2$; or $\frac{n}{2} - \frac{1}{\sigma} < 0$ et donc $\theta \leq \omega$. Ainsi, $\theta = \omega$, $S_\omega(u) = S_\omega(Q_\omega)$ i.e. u est un état fondamental, et $E(u) = E(Q_\omega)$ donc Q_ω est un minimum de (17).

La stabilité de l'ensemble $\mathcal{G}_\omega$ est alors claire: en effet dans le cas contraire on peut construire une suite $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de solutions de (NLS) pour lesquelles $u_m(0) = \varphi_m$ avec $\lim \|\varphi_m - Q_\omega\|_{H^1} = 0$, lorsque $m \to +\infty$ et pour lesquelles il existe un temps $t_m > 0$, avec $\inf_{\psi\in\mathcal{G}_\omega} \|u_m(t_m) - \psi\|_{H^1} \geq \varepsilon$, pour un $\varepsilon > 0$ fixé. Mais alors $\|\varphi_m\|_{L^2}$ tend vers $\|Q_\omega\|_{L^2}$ et de même, $E(\varphi_m)$ tend vers $E(Q_\omega) = I_\mu$; par conservation de l'énergie et de la norme L^2 pour l'équation de (NLS), $\|u_m(t_m)\|_{L^2}$ converge également vers $\|Q_\omega\|_{L^2}$ et $E(u_m(t_m))$ vers I_μ; le lemme 3.6 implique alors l'existence de $y_k \in \mathbb{R}^n$ et d'une sous-suite (u_{m_k}) de (u_m) pour laquelle $u_{m_k}(t_{m_k}, . - y_k)$ converge vers un état fondamental, contredisant ainsi l'inégalité $\inf_{\psi\in G_\omega} \|u_m(t_m) - \psi\|_{H^1} \geq \varepsilon$.

On remarque que dans le cas critique $\sigma = 2/n$, tous les états fondamentaux vérifient $E(Q_\omega) = E(Q) = 0$ et $\|Q_\omega\|_{L^2} = \|Q\|_{L^2}$. La caractérisation variationnelle de Q comme minimisant l'énergie à norme L^2 constante est toujours valable dans ce cas, comme le montre l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg avec meilleure constante (12), et l'équivalent du lemme 3.6 est vrai à condition d'utiliser un changement d'échelle sur la suite minimisante u_{m_k} (voir la Proposition 2.15. Ainsi, même dans le cas critique on a “stabilité modulo changement d'échelle” de l'état stationnaire $e^{i\omega t}Q_\omega$; cela sera utilisé par P. Raphaël; on n'a cependant pas stabilité de Q_ω au sens précédent, car ce paramètre d'échelle peut devenir très grand.

Théorème 3.7 *On suppose $\sigma = 2/n$, alors la solution $u_\omega(t,x) = e^{i\omega t}Q_\omega(x)$ n'est pas stable au sens de la definition 3.4; plus précisément, il existe une suite de données initiales $\varphi_m \in H^1(\mathbb{R}^n)$ qui converge vers Q_ω fortement dans H^1, et telle que la solution u_m correspondante de (NLS) explose en temps fini.*

On remarque en effet que la définition de la stabilité implique en particulier l'existence globale de la solution pour des données initiales proches d'un état fondamental.

La preuve du théorème est immédiate une fois que l'on a remarqué que $E(Q_\omega) = 0$ lorsque $\sigma = 2/n$, de sorte que $E(\mu Q_\omega) < 0$ pour $\mu > 1$. Puisque $Q_\omega \sim Ce^{-\sqrt{\omega}|x|}$ lorsque $|x| \to +\infty$, $Q_\omega \in \Sigma$ et il suffit de choisir par exemple $\varphi_m = (1 + \frac{1}{m})Q_\omega$ pour obtenir le résultat, en appliquant le Corollaire 2.14.

La conclusion du théorème 3.7 est d'ailleurs vraie non seulement pour les états fondamentaux, mais pour toutes les solutions de (14) puisque le seul argument utilisé est la nullité de l'énergie, ce qui par le Lemme 2.12 est vrai pour toutes les solutions de (14).

Dans le cas strictement surcritique $\sigma > 2/n$, par contre, l'instabilité n'est démontrée par explosion que pour les états fondamentaux. On peut cependant montrer l'instabilité spectrale (donc aussi non linéaire) des autres état stationnaires dans ce cas (voir les remarques du paragraphe 3.5).

Théorème 3.8 *On suppose $2/n < \sigma < 2/(n-2)$; alors la solution $u_\omega(t,x) = e^{i\omega t}Q_\omega(x)$ est instable dans le même sens que dans le Théorème 3.7.*

La preuve de ce théorème est un peu moins évidente que celle du théorème précédent, puisque l'on n'a plus $E(Q_\omega) = 0$. De plus, en posant

$$M(v) = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^2 dx - \frac{n\sigma}{2(\sigma+1)} \int_{\mathbb{R}^n} |v|^{2\sigma+2} dx = 2E(v) + \frac{2-n\sigma}{2(\sigma+1)} \int_{\mathbb{R}^n} |v|^{2\sigma+2} dx$$

alors on a immédiatement, en appliquant la proposition 2.13 à la solution $e^{i\omega t}Q_\omega$, que $M(Q_\omega) = 0$; en particulier, $E(Q_\omega) > 0$ si $\sigma > 2/n$. Ceci montre que l'on ne peut pas appliquer directement l'argument précédent, mais qu'il faut utiliser le second terme intervenant dans l'identité de la Proposition 2.13, ou dans l'expression de M. Le problème est que ce terme n'est pas conservé par l'évolution, il n'est donc pas clair que, s'il est négatif au départ, il va le rester. L'argument suivant utilise une nouvelle caractérisation variationnelle de Q_ω et est du à [3]. On pose $\mathcal{M} = \{v \in H^1(\mathbb{R}^n), v \neq 0, M(v) = 0\}$.

Lemme 3.9 *Pour $\sigma < 2/(n-2)$, ψ est un état fondamental de (NLS) si et seulement si $\psi \in \mathcal{M}$ et $S_\omega(\psi) = \inf\{S_\omega(v), v \in \mathcal{M}\} := d_\omega$.*

On remarque alors que l'ensemble

$$K_\omega = \{u \in H^1(\mathbb{R}^n),\ S_\omega(u) < d_\omega,\ M(u) < 0\}$$

est stable par le flot de NLS : en effet, S_ω est conservé par le flot, donc si $u(t)$ sort de K_ω au temps t^*, alors nécessairement, $M(u(t^*)) = 0$, i.e. $u(t^*) \in \mathcal{M}$, mais cela contredit le lemme 3.9. On peut de plus montrer que dès que $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ vérifie $M(u) < 0$, alors $M(u) \leq S_\omega(u) - d_\omega$. Il suffit donc de considérer une suite φ_m de données initiales convergeant vers Q_ω dans $H^1(\mathbb{R}^n)$, avec $\varphi_m \in K_\omega$, et la Proposition 2.13 implique alors que tant que la solution $u_m(t)$ correspondante existe, elle vérifie

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 |u_m(t)|^2 dx = M(u_m(t)) \leq S_\omega(\varphi) - d_\omega < 0$$

et donc la solution explose en temps fini par le même argument que dans la Proposition 2.14.

La méthode qui a été utilisée dans ce paragraphe pour montrer les résultats de stabilité repose sur une caractérisation variationnelle des ondes solitaires considérées comme des minima globaux d'un problème de minimisation sous contraintes. Elle s'applique donc évidemment à la stabilité des ondes solitaires de (4), dont on a l'unicité modulo les translations, même si ce n'est pas la méthode introduite à l'origine par Benjamin (voir [1]) pour étudier la stabilité des ondes solitaires de cette équation. On verra cette dernière méthode au prochain paragraphe. La famille des ondes solitaires – donc aussi des états fondamentaux – est dans ce cas la famille à deux paramètres $(Q_c(.-x_0))_{c>0, x_0 \in \mathbb{R}}$, et donc la notion de stabilité orbitale est donnée par la definition suivante.

Définition 3.10 *L'onde progressive $u_c(t,x) = Q_c(x-ct)$ est stable si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $\delta > 0$ pour laquelle $\|\varphi - Q_c\|_{H^1} \leq \delta$ entraine que la solution $u(t,x)$ correspondante de l'équation (4) vérifie:* $\inf_{y\in\mathbb{R}} \|u(t,.) - Q_c(.-y)\|_{H^1} \leq \varepsilon$.

On obtient alors le résultat suivant :

Théorème 3.11 *Si $p < 5$, l'onde progressive $u_c(t,x)$ de (4) est stable au sens précédent.*

Pour l'instabilité, par contre, les arguments précédents nécessitent au minimum que l'on sache montrer l'existence de solutions qui explosent en temps fini. Or ce problème est toujours ouvert pour l'équation (4) si $p > 5$ et n'a été démontré dans le cas $p = 5$ que récemment (voir [52]); si ce dernier résultat permet effectivement de montrer l'instabilité dans le cas critique $p = 5$, cette instabilité dans les cas critiques et surcritiques était déjà connue auparavant par d'autres méthodes, qui seront développées dans le paragraphe suivant.

Enfin, si la méthode dite de "Cazenave-Lions", développée ici s'applique de manière assez générale – pour des équations dont la version stationnaire est invariante par changement d'échelle – pour montrer la stabilité de l'ensemble $\mathcal{G}_\omega$ des états fondamentaux, une importante difficulté en général pour obtenir la stabilité des états stationnaires individuellement reste de pouvoir prouver leur unicité modulo les symétries du système. En effet, sorti du cadre monodimensionnel ou radial (et même encore souvent dans ce dernier cas), cette question (qui est un problème d'équations elliptiques) reste essentiellement ouverte. C'est le cas, par exemple, pour les équations de KP. On peut en effet montrer que l'équation de KPII généralisée,

$$\partial_t u + \partial_x^3 u + \partial_x(u^p) + \partial_x^{-1}\partial_y^2 u = 0 \tag{19}$$

ne possède pas d'ondes solitaires localisées de la forme $u(x - ct, y)$ avec $c > 0$ lorsque $p < 5$ (voir [27]); Par contre, l'équation de KPI

$$\partial_t u - \partial_x^3 u + \partial_x(u^p) + \partial_x^{-1}\partial_y^2 u = 0 \tag{20}$$

en possède, si $p < 5$, et les états fondamentaux peuvent être caractérisés de manière variationnelle comme précédemment. La norme L^2 est invariante pour (20) et (19), ainsi que l'énergie donnée par

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} (\partial_x u)^2 dxdy \pm \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} (\partial_x^{-1}\partial_y u)^2 dxdy - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^n} u^{p+1} dxdy$$

pour les solutions vivant dans l'espace d'énergie

$$Y = \left\{u \in L^2(\mathbb{R}^2),\ \partial_x u \in L^2(\mathbb{R}^2),\ \partial_x^{-1}\partial_y u \in L^2(\mathbb{R}^2)\right\} = \{\partial_x\varphi,\ \varphi \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^2),\ \partial_x^2\varphi \in L^2(\mathbb{R}^2)\}.$$

La méthode précédente permet alors de montrer la stabilité de l'ensemble des états fondamentaux, pour $p < 7/3$ (voir [26],[48]) mais le problème de l'unicité est encore totalement ouvert.

3.3 Stabilité par utilisation d'une fonctionnelle de Lyapunov

La méthode précédente présente des limitations – outre celle due à ce problème d'unicité – lorsque l'équation stationnaire considérée n'est plus invariante d'échelle; c'est le cas si par exemple on ajoute un potentiel $V(x)$ dans l'équation de (NLS) ou si le terme non linéaire n'est plus homogène, mais dépend explicitement de la variable d'espace x. De plus, la méthode précédente est basée sur une caractérisation des états fondamentaux comme des minima globaux d'un problème de minimisation sous contraintes, alors que la stabilité est un problème local. On va voir que le fait qu'ils soient des minima locaux suffit, si ces minima ne sont pas trop dégénérés.

La méthode considérée dans ce paragraphe consiste à utiliser la fonctionnelle d'action S_ω comme une fonctionnelle de Lyapunov, et elle est basée sur la remarque suivante, évidente si l'on se souvient que Q_ω est un point critique de S_ω et que S_ω est invariante par le flot considéré : si $S''_\omega(Q_\omega)$ est un opérateur défini positif sur $H^1(\mathbb{R}^n)$, i.e. s'il existe $\delta > 0$ tel que $(S''_\omega(Q_\omega)v, v) \geq \delta \|v\|^2_{H^1}$ pour tout $v \in H^1(\mathbb{R}^n)$, alors la solution $e^{i\omega t}Q_\omega$ est stable.

Evidemment, cette propriété n'est jamais vérifiée, à cause des invariances du système considéré, qui montrent que justement on ne peut jamais avoir la stabilité dans ce sens là : l'invariance par translation, par exemple, implique que le noyau de $L_\omega = S''_\omega(Q_\omega)$ n'est jamais réduit à zero.

Plus précisément, pour l'équation de KdV généralisée, on a

$$L_c = S''_c(Q_c) = -\partial_x^2 + c - pQ_c^{p-1} \tag{21}$$

avec toujours $S_c(v) = E(v) + cm(v)$, $m(v) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} v^2 dx$. L'opérateur L_c, autoajoint sur $L^2(\mathbb{R})$ a un spectre essentiel égal à $[c, +\infty[$. De plus, en dérivant l'équation (13) par rapport à la variable x on obtient $L_c \partial_x Q_c = 0$. Le noyau de L_c est alors engendré par $\partial_x Q_c$ (il suffit de regarder le comportement à l'infini des solutions de l'équation differentielle définissant le noyau); d'autre part, un théorème classique sur les opérateurs $-\partial_x^2 + V(x)$ en dimension 1 (basé sur un théorème de comparaison de Sturm-Liouville) permet d'affirmer, puisque $\partial_x Q_c$ a un unique zero sur $\mathbb{R}$, que 0 est la seconde valeur propre de L_c, et donc que L_c possède une unique valeur propre strictement négative, correspondant à une fonction propre strictement positive sur $\mathbb{R}$. On a alors la proposition suivante.

Proposition 3.12 *S'il existe une constante $\delta > 0$ telle que $(L_c v, v) \geq \delta\|v\|^2_{H^1}$ pour tout $v \in H^1(\mathbb{R})$ vérifiant $(v, \partial_x Q_c) = (v, Q_c) = 0$, alors l'onde progressive $u_c(t,x) = Q_c(x - ct)$ est orbitalement stable.*

L'idée de la preuve (voir [1], [7]) est la suivante : on note $u(t,x)$ la solution de (4) de donnée initiale $\varphi \in H^1(\mathbb{R})$ (qui sera choisie proche de Q). Par un théorème de fonctions implicites, il existe une fonction $x(t)$ telle que $(u(t, x+x(t)), \partial_x Q_c) = 0$; on pose $\varepsilon(t,x) = u(t, x+x(t)) - Q_c$ (la fonction $x(t)$ existe tant que ε reste petit dans $H^1(\mathbb{R})$). La conservation de la norme L^2 implique alors, pour tout $t \geq 0$, $\|u(t, . + x(t))\|^2_{L^2} = \|u(t)\|^2_{L^2} = \|\varphi\|^2_{L^2}$ et donc

$$\|u(t, . + x(t))\|^2_{L^2} - \|Q_c\|^2_{L^2} = \|\varphi\|^2_{L^2} - \|Q_c\|^2_{L^2} = (\varepsilon(t), \varepsilon(t) + 2Q_c) = 2(Q_c, \varepsilon(t)) + \|\varepsilon(t)\|^2_{L^2}.$$

On en déduit que $(Q_c, \varepsilon(t)) = O(\|\varepsilon(t)\|^2_{L^2} + \varepsilon_0)$ où $\varepsilon_0 = \|Q_c - \varphi\|_{H^1}$. Maintenant, $\tilde{\varepsilon}(t) = \varepsilon(t) - (Q_c, \varepsilon(t))\frac{Q_c}{\|Q_c\|^2_{L^2}}$ vérifie $(\tilde{\varepsilon}(t), \partial_x Q_c) = (\varepsilon(t), \partial_x Q_c) = 0$, $(\tilde{\varepsilon}(t), Q_c) = 0$, et $\tilde{\varepsilon}(t) = \varepsilon(t) + O(\|\varepsilon(t)\|^2_{L^2} + \varepsilon_0)$; en d'autres termes, on peut se ramener, grâce à la conservation de la norme L^2, au cas où les perturbations sont transverses à Q_c, modulo des termes d'ordre supérieurs.

On a alors par conservation de S_c pour (4)

$$\begin{aligned}
S_c(\varphi) - S_c(Q_c) &= O(\varepsilon_0) = S_c(u(t,x)) - S_c(Q_c)) \\
&= S_c(Q_c + \varepsilon(t)) - S_c(Q_c) = S_c'(Q_c)\varepsilon(t) + \tfrac{1}{2}(S''(Q_c)\varepsilon(t), \varepsilon(t)) + o(\|\varepsilon(t)\|_{H^1}^2) \\
&= \tfrac{1}{2}(S_c''(Q_c)\tilde{\varepsilon}(t), \tilde{\varepsilon}(t)) + o(\|\varepsilon(t)\|_{H^1}^2) + O(\varepsilon_0) \\
&\geq \tfrac{\delta}{2}\|\tilde{\varepsilon}(t)\|_{H^1}^2 + o(\|\varepsilon(t)\|_{H^1}^2) - C\varepsilon_0 \geq \tfrac{\delta}{4}\|\varepsilon(t)\|_{H^1}^2 - C\varepsilon_0
\end{aligned}$$

pour $\varepsilon(t)$ suffisament petit ; δ est evidemment indépendant de t, ce qui montre que si la fonction ε est assez petite au temps $t = 0$, elle doit le rester i.e. la solution $Q_c(x - ct)$ est stable.

Le critère de stabilité de la Proposition précédente peut maintenant être relié à la puissance critique $p = 5$ de la stabilité pour (4) grâce à la Proposition suivante, qui est une propriété générale.

Proposition 3.13 *On suppose que $\frac{d}{dc}m(Q_c) > 0$; alors les hypothèses de la Proposition 3.12 sont satisfaites, i.e. il existe $\delta > 0$ tel que $(L_c v, v) \geq \delta\|v\|_{H^1}^2$, pour tout $v \in H^1$ avec $(v, Q_c) = (v, \partial_x Q_c) = 0$.*

On peut alors conclure, puisque l'égalité $Q_c(x) = c^{1/p-1}Q(\sqrt{c}x)$ implique $\|Q_c\|_{L^2}^2 = c^{2/(p-1)-1/2}\|Q\|_{L^2}^2$ et $\frac{d}{dc}m(Q_c) > 0$ si $p < 5$. De manière générale, si on note $d(c)$ la fonction $S_c(Q_c)$ alors $\frac{d}{dc}m(Q_c) = d''(c)$ puisque $d'(c) = S_c'(Q_c) + m(Q_c) = m(Q_c)$. Ainsi, la stabilité est reliée à la convexité de la fonction $d(c)$. La preuve est générale lorsque l'on a cette description du spectre (voir [35]). En dérivant l'équation $S_c'(Q_c) = 0$ par rapport à c on obtient $S_c''(Q_c)\frac{dQ_c}{dc} = L_c\frac{dQ_c}{dc} = -Q_c$ et donc $(L_c\frac{dQ_c}{dc}, \frac{dQ_c}{dc}) = -(Q_c, \frac{dQ_c}{dc}) = -d''(c) < 0$; On utilise alors la décomposition spectrale de $\frac{dQ_c}{dc}$ en $\frac{dQ_c}{dc} = a_0\chi_c + b_0\partial_x Q_c + p_0$ avec $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ et $p_0 \in \mathrm{vect}\{\chi_c, \partial_x Q_c\}^\perp$ et $(L_c p_0, p_0) \geq \delta\|p_0\|_{H^1}^2 > 0$, et où χ_c est la fonction propre normalisée correspondant à l'unique valeur propre négative $-\lambda_c$ de L_c. Ainsi,

$$(L_c\frac{dQ_c}{dc}, \frac{dQ_c}{dc}) = -a_0^2\lambda_c + (L_c p_0, p_0) = -d''(c). \tag{22}$$

D'autre part, si $v \in H^1(\mathbb{R})$ avec $(v, Q_c) = (v, \partial_x Q_c) = 0$, on a également une décomposition analoque en $v = a\chi + p$ et donc

$$\begin{aligned}
&-(Q_c, v) = 0 = (\tfrac{dQ_c}{dc}, v) = -a_0 a\lambda_c + (L_c p_0, p) \\
&\leq -a_0 a\lambda_c + (L_c p_0, p_0)^{1/2}(L_c p, p)^{1/2}
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$(L_c p, p) \geq \frac{(a_0 a\lambda_c)^2}{(L_c p_0, p_0)} = \frac{(a_0 a\lambda_c)^2}{a_0^2\lambda_c - d''(c)} = \frac{a^2\lambda_c}{1 - \nu}$$

avec $\nu = \frac{d''(c)}{a_0^2\lambda_c}$, en utilisant (22) et $0 < \nu < 1$ puisque $(L_c p_0, p_0) > 0$. On en déduit immédiatement que

$$(L_c v, v) = -a^2\lambda_c + (L_c p, p) \geq -a^2\lambda_c + \frac{a^2\lambda_c}{1 - \nu} = a^2\lambda_c\frac{\nu}{1 - \nu} > 0$$

pour tout $v \in H^1(\mathbb{R})$ avec $(v, Q_c) = (v, \partial_x Q_c) = 0$. Il est maintenant facile de conclure car $0 \neq \sigma_e(L_c)$.

Pour l'équation de (NLS), la linéarisation de l'action, ici considérée comme une fonctionnelle définie sur des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, donne :

$$S''_\omega(Q_\omega) = L_\omega = \begin{pmatrix} L^+ & 0 \\ 0 & L^- \end{pmatrix} \tag{23}$$

où $L^+ = -\Delta + \omega - (2\sigma+1)Q_\omega^{2\sigma}$ et $L^- = -\Delta + \omega - Q_\omega^{2\sigma}$ avec

$$(S''_\omega(Q_\omega)u, v) = (L^+ \mathrm{Re}\, u, \mathrm{Re}\, v) + (L^- \mathrm{Im}\, u, \mathrm{Im}\, v).$$

L^+ et L^- ont là encore pour spectre essentiel l'intervalle $[\omega, +\infty[$, et les relations $L^+\partial_{x_i} Q_\omega = 0$, $i = 1, \dots, n$ (obtenues en dérivant l'équation (14) par rapport à x_i) et $L^- Q_\omega = 0$ (qui peut également s'écrire $L_\omega(iQ_\omega) = 0$) proviennent des invariances de l'équation par translations spaciales et transformations de jauge. S'il est clair, au vu de l'équation $L^-Q_\omega = 0$ que L^- est un opérateur défini positif lorsqu'on le restreint à l'orthogonal de Q_ω, l'analyse de la partie négative du spectre de L^+ est plus délicate. La caractérisation variationnelle de Q_ω permet d'obtenir le fait que L^+ a au plus une valeur propre négative. Il n'est pas difficile de voir alors que L^+ a effectivement une valeur propre strictement négative. Il suffit par exemple de calculer $(L^+Q_\omega, Q_\omega) = -2\sigma \int_{\mathbb{R}^n} Q_\omega^{2\sigma+1} dx < 0$. Le point le plus délicat consiste à montrer que le noyau de L^+ est réduit à l'espace engendré par les fonctions $\partial_{x_i} Q_\omega$, $1 \le i \le n$. Puisque L^+ est là encore un opérateur de Schrödinger avec potentiel radial, toute fonction du noyau de L^+ se décompose en une somme de fonctions de la forme $f_k(r)Y_k(\theta)$, $r = |x|$, $f_k \in L^2(0, +\infty; r^{n-1}dr)$ et Y_k est une harmonique sphérique de degré k vérifiant $-\Delta_{S^{n-1}} Y_k = \lambda_k Y_k$, avec $\lambda_k = k(n - 2 + k)$; f_k vérifie quant à elle l'équation

$$A_k f_k = \left(-\frac{d^2}{dr^2} - \frac{n-1}{r}\frac{d}{dr} + \omega - (2\sigma+1)Q_\omega^{2\sigma} + \frac{\lambda_k}{r^2} \right) f_k = 0.$$

De plus, les fonctions $\partial_{x_i} Q_\omega = \frac{x_i}{r}\partial_r Q_\omega$ correspondent à des harmoniques sphériques de degré 1, et $\partial_r Q_\omega$ ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$, donc (voir Théorème XIII.8 de [62]) une autre fonction du noyau correspond nécessairement à $k = 0$, i.e. à une fonction radiale. Il suffit donc de montrer que la solution f de l'équation différentielle ordinaire

$$\begin{cases} f'' + \frac{n-1}{r} f' + \omega f - (2\sigma+1)Q_\omega^{2\sigma} f = 0 \\ f(0) = 1, \quad f'(0) = 0 \end{cases} \tag{24}$$

ne s'annule pas en $+\infty$. Or si on considère la solution $g(r) = g(r, \alpha)$ de

$$\begin{cases} g'' + \frac{n-1}{r} g' + \omega g - g^{2\sigma+1} = 0 \\ g(0) = \alpha, \quad g'(0) = 0 \end{cases} \tag{25}$$

alors $f = \frac{dg}{d\alpha}|_{\alpha=\alpha_0}$, où α_0 est la valeur de α qui donne $g = Q_\omega$

Mais, au cours de sa preuve de l'unicité de l'état fondamental, Kwong (voir [45]) montre que $\lim_{r\to+\infty} \frac{\partial g}{\partial \alpha}|_{\alpha=\alpha_0}(r) = +\infty$, ce qui achève de boucler l'argument. Au vu de ceci, il est clair que la determination du noyau de L^+, qui est essentielle pour obtenir la stabilité ici, est intimement reliée à la propriété d'unicité de l'état fondamental Q_ω, qui est elle même essentielle pour obtenir l'unicité par la méthode de Cazenave-Lions. Une fois le spectre de L_ω caractérisé, on obtient, avec les mêmes preuves que pour KdV à quelques détails près, les propositions suivantes.

Proposition 3.14 *S'il existe une constante $\delta > 0$ telle que pour tout v_1, $v_2 \in H^1(\mathbb{R}^n)$ (à valeurs réelles) vérifiant $(v_1 \partial_{x_i} Q_\omega) = (v_1, Q_\omega) = (v_2, Q_\omega) = 0$, $1 \le i \le n$, on a*

$$(L^+ v_1, v_1) + (L^- v_2, v_2) \ge \delta(\|v_1\|_{H^1}^2 + \|v_2\|_{H^1}^2)$$

alors l'état stationnaire $u_\omega(t,x) = e^{i\omega t} Q_\omega(x)$ est orbitalement stable.

Proposition 3.15 *On suppose $\frac{d}{d\omega} m(Q_\omega) > 0$; alors il existe $\delta > 0$ tel que $\mathrm{Re}\,(L_\omega v, v) \ge \delta\|v\|_{H^1}^2$, pour tout $v \in H^1(\mathbb{R}^n)$ (à valeurs dans $\mathbb{C}$) avec $\mathrm{Re}\,(v, Q_\omega) = \mathrm{Re}\,(v, iQ_\omega) = \mathrm{Re}(v, \partial_{x_i} Q_\omega) = 0$, $1 \le i \le n$.*

Là encore, on conclut en remarquant que $\|Q_\omega\|_{L^2}^2 = \omega^{1/\sigma - n/2}\|Q\|_{L^2}^2$, donc $\frac{d}{d\omega} m(Q_\omega) > 0$ si $\sigma < 2/n$, et on retrouve le critère de stabilité du paragraphe 2.

L'avantage de cette seconde méthode est qu'elle est susceptible de s'adapter aux problèmes qui n'admettent pas d'invariance d'echelle, même si alors il est souvent difficile de vérifier la condition $\frac{d}{d\omega} m(Q_\omega) > 0$. Un second avantage (qui peut dans certains cas aider à résoudre cette dernière restriction) est qu'elle est plus robuste, i.e. plus stable par perturbations de l'équation que la méthode précédente. Cette remarque a par exemple été utilisée dans [25] pour étudier la stabilité des états stationnaires d'une équation de NLS avec un terme non linéaire dépendant de la variable spatiale x, et qui représente un milieux hétérogène. L'équation considérée est de la forme

$$i\partial_t u + \Delta u + V(x)|u|^{2\sigma} u = 0, \quad u(t,x) \in \mathbb{C}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{26}$$

Ici, $n \ge 3$, et pour un certain b avec $0 < b < 2$, $\sigma < \frac{2-b}{n-2}$ et $V(x)$ est proche de la fonction $\frac{1}{|x|^b}$ au sens où il existe a avec $a > 2 - \sigma n + 2\sigma > b$ tel que $|V(x) - \frac{1}{|x|^b}| \le \frac{C}{|x|^a}$. De plus, on suppose que V vérifie une certaine condition d'intégrabilité locale, qui permet d'obtenir que l'énergie associée,

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v(x)|^2 dx - \frac{1}{2\sigma + 2}\int_{\mathbb{R}^n} V(x)|v(x)|^{2\sigma+2} dx \tag{27}$$

est bien définie pour $v \in H^1(\mathbb{R}^n)$.

On montre alors le théorème suivant, en utilisant la méthode de ce paragraphe (i.e. on montre que les hypothèses de l'équivalent de la Proposition 3.14 sont vérifiées), d'abord pour $V(x) = \frac{1}{|x|^b}$, puis pour V vérifiant l'hypothèse ci-dessus, en utilisant le fait que cette méthode est stable par perturbations. On note ici que s'il est facile de montrer la stabilité des états fondamentaux de (26) lorsque $V(x) = \frac{1}{|x|^b}$ par la méthode de Cazenave-Lions, il est plus difficile de montrer que les hypothèses de la Proposition 3.14 sont vérifiées.

Théorème 3.16 *On suppose que V vérifie les hypothèses ci-dessus, et que $\sigma < \frac{2-b}{n}$. Soit ϕ_ω un état fondamental de l'équation (26), i.e. une solution de l'équation $E'(\phi_\omega) + \omega\phi_\omega = 0$ qui minimise l'action $S_\omega(v) = E(v) + \frac{\omega}{2}\|v\|_{L^2}^2$ parmi toutes les solutions. Alors il existe $\omega^* > 0$ tel que l'état stationnaire $u_\omega(t,x) = e^{i\omega t}\phi_\omega(x)$ est orbitalement stable dans $H^1(\mathbb{R}^n)$ pour tout ω avec $0 < \omega < \omega^*$, i.e. $\forall\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $\|\varphi - \phi_\omega\|_{H^1} \leq \delta$ alors la solution u de (26) avec $u(0) = \varphi$ vérifie*

$$\inf_{\theta\in\mathbb{R}} \|u(t) - e^{i\theta}\phi_\omega\|_{H^1} \leq \varepsilon.$$

Si $V(x) = \frac{1}{|x|^b}$, alors on peut prendre $\omega^* = +\infty$.

La principale difficulté, pour le cas $V(x) = \frac{1}{|x|^b}$ est de caractériser le spectre de L^+, et plus particulièrement de montrer que le noyau de L^+ est réduit à 0 (on n'a pas ici d'invariance par translations); puisque ce noyau ne contient pas les $\partial_{x_j}\phi_\omega$, la méthode décrite précédemment n'est pas applicable. On montre alors que si le noyau n'est pas réduit à 0, on peut construire une perturbation de la fonctionnelle d'action, pour laquelle ϕ_ω est un point critique de type col, avec un indice de Morse (dimension du sous espace négatif de $S''(\phi_\omega)$) au moins égal à deux, ce qui n'est pas possible pour un point critique de type col.

3.4 Instabilité par fonctionnelle de Lyapunov

Cette méthode, initiée pour l'équation de Klein-Gordon par Shatah et Strauss, a été adaptée à l'équation de KdV généralisée par Bona, Souganidis et Strauss [9]. Elle permet d'obtenir le résultat suivant.

Théorème 3.17 *On suppose que $\frac{d}{dc}m(Q_c) < 0$ (resp. $\frac{d}{d\omega}m(Q_\omega) < 0$) alors l'onde progressive $u_c(t,x) = Q_c(x-ct)$ de (4) (resp. l'état stationnaire $u_\omega(t,x) = e^{i\omega t}Q_\omega(x)$ de (2)) est instable.*

Là encore, la condition $\frac{d}{dc}m(Q_c) < 0$ s'écrit pour (4) $p > 5$ et on retrouve le cas surcritique du paragraphe précédent; idem pour l'équation de NLS. Le théorème est toujours vrai pour KdV dans le cas critique et a été prouvé par Martel et Merle (voir [51]). On donne ici seulement les grandes idées de la preuve dans le contexte de l'équation (4): si $\frac{d}{dc}m(Q_c) < 0$, alors on montre que Q_c est un point selle de l'énergie à norme L^2 constante. On peut par exemple considérer la courbe ψ_γ, pour γ proche de c, définie par $\psi_\gamma(x) = Q_\gamma(\frac{x}{\sigma(\gamma)})$ avec $\sigma(\gamma) = \frac{\|Q_c\|_{L^2}^2}{\|Q_\gamma\|_{L^2}^2}$; on a alors facilement $\|\psi_\gamma\|_{L^2}^2 = \|Q_c\|_{L^2}^2$, $\psi_c = Q_c$ et d'autre part, $\frac{d}{d\gamma}E(\psi_\gamma)|_{\gamma=c} = 0$, $\frac{d^2}{d\gamma^2}E(\psi_\gamma)|_{\gamma=c} < 0$. Ainsi, sur la courbe ψ_γ, la norme L^2 est constante et l'énergie a un maximum local en $\gamma = c$. Il est également possible de construire une telle courbe sans utiliser l'invariance par dilatation, en perturbant Q_c dans la direction de la valeur propre négative de L_c (voir [9] et [35]).

On part d'une donnée initiale $\varphi = \psi_\gamma$, γ proche de c; la solution peut alors s'écrire sous la forme $u(t,x) = Q_c(x - x(t)) + \varepsilon(t, x - x(t))$ avec $(\varepsilon, Q'_c) = 0$, tant que $u(t,x)$ reste dans un voisinage de l'orbite de Q_c. On construit alors à partir de $y = \frac{d\psi_\gamma}{d\gamma}|_{\gamma=c}$ une fonctionnelle de Lyapunov $J(t)$, définie tant que $u(t,x)$ reste dans le voisinage de l'orbite de Q_c ci-dessus permettant de définir $x(t)$, par

$$J(t) = \int_{\mathbb{R}} Y(x - x(t))u(t,x)dx$$

où $Y(x) = \int_{-\infty}^{x} y(z)dz$. On montre alors que $J'(t) \geq E(Q_c) - E(\varphi) > 0$; la preuve de cette inégalité est technique, mais peut être obtenue en utilisant uniquement l'équation, ses symétries et les propriétés de la courbe ψ_γ, i.e. l'existence de la fonctionnelle de Lyapunov lorsque $\frac{d}{dc}m(Q_c) < 0$ est relativement générale (voir [35]).

D'autre part, en utilisant des propriétés un peu fines de la fonction de Airy, i.e. la linéarisation de l'équation de (4), on montre l'estimation $J(t) \leq C(t^{2/3} + t^{-2/3})$ pour $t > 0$, ce qui montre que la fonctionnelle $J(t)$ ne peut pas être définie pour tout temps $t > 0$, donc que $u(t,x)$ sort nécessairement du voisinage de l'orbite de Q_c, i.e. que $u_c(t,x) = Q_c(x - ct)$ est orbitalement instable.

On remarque que ce dernier point est particulier à l'équation de KdV généralisée (voir aussi [22], [26] et [72] pour une application à des équations de ce type en dimension supérieure). En effet, les équations hamiltoniennes générales considérées dans [35] sont de la forme

$$\frac{du}{dt} = \mathcal{J}E'(u(t))$$

où E est l'énergie (ou hamiltonien) et $\mathcal{J}$ est un opérateur antisymétrique borné sur l'espace d'énergie; c'est le cas pour NLS ($\mathcal{J}$ est la multiplication par le nombre complexe i), mais pas pour l'équation de KdV généralisée, où on a $\mathcal{J} = \partial_x$. Dans le cas où $\mathcal{J}$ est effectivement bornée sur H^1, on obtient le fait que la fonctionnelle de Lyapunov $J(t)$ est bornée en temps, tant qu'elle existe, ce qui permet également d'aboutir à une contradiction (voir [9]).

3.5 Quelques remarques complémentaires

Plusieurs points importants n'ont pas été abordés dans ce cours par manque de temps. Parmi ceux, très liés à la stabilité des ondes solitaires et qui donnent lieu à une recherche très active actuellement, on peut citer l'étude directe de la linéarisation de l'équation d'évolution autour d'une onde solitaire : en se plaçant dans un référentiel dans lequel l'onde solitaire est un point fixe, on aboutit à une équation linéarisée de la forme

$$\frac{dv}{dt} = \mathcal{J}L_\omega v(t)$$

où $L_\omega = S''(Q_\omega)$ est l'opérateur déjà introduit précédemment, et $\mathcal{J}$ est l'opérateur anti-symétrique intervenant dans l'équation d'évolution. La partie principale de $\mathcal{J}L_\omega$ est un opérateur anti-adjoint, de sorte que $\sigma_e(\mathcal{J}L_\omega) \subset i\mathbb{R}$. La question est ensuite de savoir s'il existe des valeurs propres en dehors de $\sigma_e(\mathcal{J}L_\omega)$ et en particulier en dehors de l'axe imaginaire. En ce qui concerne (4) et les états fondamentaux de NLS, la question de la stabilité spectrale est entièrement résolue : il y a stabilité (aucune valeur propre en dehors de l'axe imaginaire) dans les cas critiques et sous-critiques, et existence de valeurs propres instables dans les cas surcritiques (voir [59] pour (4), [33], [34], [37] pour NLS). Les progrès actuels se portent essentiellement sur l'obtention de critères pour l'existence effective d'une valeur propre instable dans le cas des états stationnaires "excités", ou bien pour compter le nombre de telles valeurs propres voir par exemple [34], [37], [39], [20]).

Un second problème qui n'a pas été mentionné ici et le sera sans doute dans le cours d'Y. Martel est celui de la stablité asymptotique. Ce problème a été étudié par Pego et Weinstein (dans un espace à poids), et Martel et Merle (dans l'espace d'énergie $H^1(\mathbb{R})$) pour l'équation de KdV généralisée (voir [60], [50], et également [28] et [56] pour une étude similaire dans le cas de l'équation de BBM généralisée). Pour l'équation de NLS, deux type de résultats existent concernant la stablité asymptotique. Les premiers concernent l'étude des petites ondes solitaires obtenues par bifurcation à partir d'un état lié d'une équation de Schrödinger linéaire avec potentiel (la non linéarité est alors surcritique, mais certains résultats sont obtenus dans l'espace d'énergie $H^1(\mathbb{R}^n)$; voir [65], [66], [36]). Une seconde catégorie de résultats concerne les ondes solitaires sans restriction de taille, mais avec une non linéarité surcritique en 0 et sous critique à l'infini (ce qui permet d'éviter le problème des perturbations contenant des petites ondes solitaires voyageant avec une grande vitesse); de plus, la stabilité est obtenue dans des espaces à poids (voir [11], [61], [12], [19]). A l'heure actuelle, la stabilité asymptotique des états stationnaires précédents de l'équation (2) est toujours un problème ouvert.

References

[1] T. B. Benjamin. The stability of solitary waves. *Proc. Roy. Soc. (London) Ser. A*, 328:153–183, 1972.

[2] T. B. Benjamin, J. L. Bona, and J. J. Mahony. Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems. *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*, 272(1220):47–78, 1972.

[3] H. Berestycki and T. Cazenave. Instabilité des états stationnaires dans les équations de Schrödinger et de Klein-Gordon non linéaires. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 293(9):489–492, 1981.

[4] H. Berestycki and P.-L. Lions. Une méthode locale pour l'existence de solutions positives de problèmes semi-linéaires elliptiques dans $\mathbf{R}^N$. *J. Analyse Math.*, 38:144–187, 1980.

[5] H. Berestycki and P.-L. Lions. Nonlinear scalar field equations. I. Existence of a ground state. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 82(4):313–345, 1983.

[6] H. Berestycki, P.-L. Lions, and L. A. Peletier. An ODE approach to the existence of positive solutions for semilinear problems in $\mathbf{R}^N$. *Indiana Univ. Math. J.*, 30(1):141–157, 1981.

[7] J. Bona. On the stability theory of solitary waves. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, 344(1638):363–374, 1975.

[8] J. L. Bona and R. Smith. The initial-value problem for the Korteweg-de Vries equation. *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*, 278(1287):555–601, 1975.

[9] J. L. Bona, P. E. Souganidis, and W. A. Strauss. Stability and instability of solitary waves of Korteweg-de Vries type. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, 411(1841):395–412, 1987.

[10] J. Bourgain. Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations. II. The KdV-equation. *Geom. Funct. Anal.*, 3(3):209–262, 1993.

[11] V. S. Buslaev and G. S. Perel′man. On the stability of solitary waves for nonlinear Schrödinger equations. In *Nonlinear evolution equations*, volume 164 of *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, pages 75–98. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.

[12] Vladimir S. Buslaev and Catherine Sulem. On asymptotic stability of solitary waves for nonlinear Schrödinger equations. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 20(3):419–475, 2003.

[13] T. Cazenave. *Semilinear Schrödinger equations*, volume 10 of *Courant Lecture Notes in Mathematics*. New York University Courant Institute of Mathematical Sciences, New York, 2003.

[14] T. Cazenave and P.-L. Lions. Orbital stability of standing waves for some nonlinear Schrödinger equations. *Comm. Math. Phys.*, 85(4):549–561, 1982.

[15] T. Cazenave and F. B. Weissler. Some remarks on the nonlinear Schrödinger equation in the critical case. In *Nonlinear semigroups, partial differential equations and attractors (Washington, DC, 1987)*, volume 1394 of *Lecture Notes in Math.*, pages 18–29. Springer, Berlin, 1989.

[16] T. Cazenave and F. B. Weissler. The Cauchy problem for the critical nonlinear Schrödinger equation in H^s. *Nonlinear Anal.*, 14(10):807–836, 1990.

[17] T. Cazenave and F. B. Weissler. Rapidly decaying solutions of the nonlinear Schrödinger equation. *Comm. Math. Phys.*, 147(1):75–100, 1992.

[18] P. Constantin and J. C. Saut. Local smoothing properties of Schrödinger equations. *Indiana Univ. Math. J.*, 38(3):791–810, 1989.

[19] S. Cuccagna. On asymptotic stability of ground states of NLS. *Rev. Math. Phys.*, 15(8):877–903, 2003.

[20] S. Cuccagna, D. Pelinovsky, and V. Vougalter. Spectra of positive and negative energies in the linearized NLS problem. *Comm. Pure Appl. Math.*, 58(1):1–29, 2005.

[21] A. Davey and K. Stewartson. On three-dimensional packets of surface waves. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, 338:101–110, 1974.

[22] A. de Bouard. Stability and instability of some nonlinear dispersive solitary waves in higher dimension. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 126(1):89–112, 1996.

[23] A. de Bouard and A. Debussche. On the effect of a noise on the solutions of the focusing supercritical nonlinear Schrödinger equation. *Probab. Theory Related Fields*, 123(1):76–96, 2002.

[24] A. de Bouard and A. Debussche. Blow-up for the stochastic nonlinear Schrödinger e quation with multiplicative noise. *Ann. Probab.*, 33(3):1078–1110, 2005.

[25] A. de Bouard and Fukuizumi R. Stability of standing waves for nonlinear Schrödinger equations with inhomogeneous nonlinearities. *To appear in Ann. Henri Poincaré.*

[26] A. de Bouard and J. C. Saut. Remarks on the stability of generalized KP solitary waves. In *Mathematical problems in the theory of water waves (Luminy, 1995)*, volume 200 of *Contemp. Math.*, pages 75–84. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.

[27] A. de Bouard and J. C. Saut. Solitary waves of generalized Kadomtsev-Petviashvili equations. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 14(2):211–236, 1997.

[28] K. El Dika. Asymptotic stability of solitary waves for the Benjamin-Bona-Mahony equation. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 13(3):583–622, 2005.

[29] B. Gidas, Wei Ming Ni, and L. Nirenberg. Symmetry of positive solutions of nonlinear elliptic equations in $\mathbf{R}^n$. In *Mathematical analysis and applications, Part A*, volume 7 of *Adv. in Math. Suppl. Stud.*, pages 369–402. Academic Press, New York, 1981.

[30] J. Ginibre and G. Velo. On a class of nonlinear Schrödinger equations. III. Special theories in dimensions 1, 2 and 3. *Ann. Inst. H. Poincaré Sect. A (N.S.)*, 28(3):287–316, 1978.

[31] J. Ginibre and G. Velo. On a class of nonlinear Schrödinger equations. I. The Cauchy problem, general case. *J. Funct. Anal.*, 32(1):1–32, 1979.

[32] R. T. Glassey. On the blowing up of solutions to the Cauchy problem for nonlinear Schrödinger equations. *J. Math. Phys.*, 18(9):1794–1797, 1977.

[33] M. Grillakis. Linearized instability for nonlinear Schrödinger and Klein-Gordon equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 41(6):747–774, 1988.

[34] M. Grillakis. Analysis of the linearization around a critical point of an infinite-dimensional Hamiltonian system. *Comm. Pure Appl. Math.*, 43(3):299–333, 1990.

[35] M. Grillakis, J. Shatah, and W. Strauss. Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry. I. *J. Funct. Anal.*, 74(1):160–197, 1987.

[36] S. Gustafson, K. Nakanishi, and Tai-Peng Tsai. Asymptotic stability and completeness in the energy space for nonlinear Schrödinger equations with small solitary waves. *Int. Math. Res. Not.*, (66):3559–3584, 2004.

[37] C. K. R. T. Jones. An instability mechanism for radially symmetric standing waves of a nonlinear Schrödinger equation. *J. Differential Equations*, 71(1):34–62, 1988.

[38] J.-L. Journé, A. Soffer, and C. D. Sogge. Decay estimates for Schrödinger operators. *Comm. Pure Appl. Math.*, 44(5):573–604, 1991.

[39] T. Kapitula, P. G. Kevrekidis, and B. Sandstede. Counting eigenvalues via the Krein signature in infinite-dimensional Hamiltonian systems. *Phys. D*, 195(3-4):263–282, 2004.

[40] T. Kato. On the Cauchy problem for the (generalized) Korteweg-de Vries equation. In *Studies in applied mathematics*, volume 8 of *Adv. Math. Suppl. Stud.*, pages 93–128. Academic Press, New York, 1983.

[41] T. Kato. On nonlinear Schrödinger equations. *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, 46(1):113–129, 1987.

[42] M. Keel and T. Tao. Endpoint Strichartz estimates. *Amer. J. Math.*, 120(5):955–980, 1998.

[43] C. E. Kenig, G. Ponce, and L. Vega. Well-posedness and scattering results for the generalized Korteweg-de Vries equation via the contraction principle. *Comm. Pure Appl. Math.*, 46(4):527–620, 1993.

[44] C. E. Kenig, G. Ponce, and L. Vega. Smoothing effects and local existence theory for the generalized nonlinear Schrödinger equations. *Invent. Math.*, 134(3):489–545, 1998.

[45] Man Kam Kwong. Uniqueness of positive solutions of $\Delta u - u + u^p = 0$ in $\mathbf{R}^n$. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 105(3):243–266, 1989.

[46] G. L. Lamb, Jr. *Elements of soliton theory.* John Wiley & Sons Inc., New York, 1980. Pure and Applied Mathematics, A Wiley-Interscience Publication.

[47] P.-L. Lions. The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case. I. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 1(2):109–145, 1984.

[48] Yue Liu and Xiao-Ping Wang. Nonlinear stability of solitary waves of a generalized Kadomtsev-Petviashvili equation. *Comm. Math. Phys.*, 183(2):253–266, 1997.

[49] O. Lopes. Radial symmetry of minimizers for some translation and rotation invariant functionals. *J. Differential Equations*, 124(2):378–388, 1996.

[50] Y. Martel and F. Merle. Asymptotic stability of solitons for subcritical generalized KdV equations. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 157(3):219–254, 2001.

[51] Y. Martel and F. Merle. Instability of solitons for the critical generalized Korteweg-de Vries equation. *Geom. Funct. Anal.*, 11(1):74–123, 2001.

[52] Y. Martel and F. Merle. Blow up in finite time and dynamics of blow up solutions for the L^2-critical generalized KdV equation. *J. Amer. Math. Soc.*, 15(3):617–664 (electronic), 2002.

[53] K. McLeod. Uniqueness of positive radial solutions of $\Delta u + f(u) = 0$ in $\mathbf{R}^n$. II. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 339(2):495–505, 1993.

[54] F. Merle. Determination of blow-up solutions with minimal mass for nonlinear Schrödinger equations with critical power. *Duke Math. J.*, 69(2):427–454, 1993.

[55] F. Merle. Existence of blow-up solutions in the energy space for the critical generalized KdV equation. *J. Amer. Math. Soc.*, 14(3):555–578 (electronic), 2001.

[56] T. Mizumachi. Asymptotic stability of solitary wave solutions to the regularized long-wave equation. *J. Differential Equations*, 200(2):312–341, 2004.

[57] H. Nawa. Asymptotic and limiting profiles of blowup solutions of the nonlinear Schrödinger equation with critical power. *Comm. Pure Appl. Math.*, 52(2):193–270, 1999.

[58] T. Ogawa and Y. Tsutsumi. Blow-up of H^1 solution for the nonlinear Schrödinger equation. *J. Differential Equations*, 92(2):317–330, 1991.

[59] R. L. Pego and M. I. Weinstein. Eigenvalues, and instabilities of solitary waves. *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*, 340(1656):47–94, 1992.

[60] R. L. Pego and M. I. Weinstein. Asymptotic stability of solitary waves. *Comm. Math. Phys.*, 164(2):305–349, 1994.

[61] G. Perelman. Some results on the scattering of weakly interacting solitons for nonlinear Schrödinger equations. In *Spectral theory, microlocal analysis, singular manifolds*, volume 14 of *Math. Top.*, pages 78–137. Akademie Verlag, Berlin, 1997.

[62] Michael Reed and Barry Simon. *Methods of modern mathematical physics. IV. Analysis of operators.* Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1978.

[63] J. C. Saut and R. Temam. Remarks on the Korteweg-de Vries equation. *Israel J. Math.*, 24(1):78–87, 1976.

[64] P. Sjölin. Regularity of solutions to the Schrödinger equation. *Duke Math. J.*, 55(3):699–715, 1987.

[65] A. Soffer and M. I. Weinstein. Multichannel nonlinear scattering for nonintegrable equations. *Comm. Math. Phys.*, 133(1):119–146, 1990.

[66] A. Soffer and M. I. Weinstein. Multichannel nonlinear scattering for nonintegrable equations. II. The case of anisotropic potentials and data. *J. Differential Equations*, 98(2):376–390, 1992.

[67] R. S. Strichartz. Restrictions of Fourier transforms to quadratic surfaces and decay of solutions of wave equations. *Duke Math. J.*, 44(3):705–714, 1977.

[68] C. Sulem and P. L. Sulem. *The nonlinear Schrödinger equation*, volume 139 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1999. Self-focusing and wave collapse.

[69] Y. Tsutsumi. L^2-solutions for nonlinear Schrödinger equations and nonlinear groups. *Funkcial. Ekvac.*, 30(1):115–125, 1987.

[70] N. G. Vakhitov and A. A. Kolokolov. Stationary solutions of the wave equation in a medium with nonlinearity saturation. *Radiophys. Qantum Electron.*, 16:783–789, 1973.

[71] S. N. Vlasov, V. A. Petrishev, and V. I. Talanov. Average description of wave beams in linear and nonlinear media (the method of moments). *Radiophys. Qantum Electron.*, 14:1062–1070, 1971.

[72] X. P. Wang, M. J. Ablowitz, and H. Segur. Wave collapse and instability of solitary waves of a generalized Kadomtsev-Petviashvili equation. *Phys. D*, 78(3-4):241–265, 1994.

[73] M. I. Weinstein. Nonlinear Schrödinger equations and sharp interpolation estimates. *Comm. Math. Phys.*, 87(4):567–576, 1982/83.

[74] M. I. Weinstein. On the structure and formation of singularities in solutions to nonlinear dispersive evolution equations. *Comm. Partial Differential Equations*, 11(5):545–565, 1986.

[75] G. B. Whitham. *Linear and nonlinear waves.* Pure and Applied Mathematics (New York). John Wiley & Sons Inc., New York, 1999. Reprint of the 1974 original, A Wiley-Interscience Publication.

[76] M. Willem. *Minimax theorems.* Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 24. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1996.

[77] K. Yajima. Schrödinger evolution equations with magnetic fields. *J. Analyse Math.*, 56:29–76, 1991.

[78] V. E. Zakharov. Instability of self-focusing of light. *Sov. Phys. JETP*, 26:994–998, 1968.

[79] V. E. Zakharov. Collapse of Langmuir waves. *Sov. Phys. JETP*, 35:908–914, 1972.