

Superrigidité géométrique

Pierre Pansu

16 mai 2006

1 Introduction

1.1 De quoi s'agit-il ?

Le terme *superrigidité*, inauguré par G.D. Mostow lorsqu'il a lu la contribution de G.A. Margulis au congrès de Vancouver, [Ma2], désigne un phénomène mis en évidence par ce dernier en 1974 : les représentations linéaires de dimension finie non unitaires des réseaux de certains groupes de Lie proviennent, par restriction, du groupe ambiant. La situation modèle est celle du réseau $Sl(n, \mathbf{Z})$ du groupe de Lie $Sl(n, \mathbf{R})$.

Par *superrigidité géométrique*, on entend un ensemble de techniques permettant d'étendre les résultats de Margulis à des classes plus larges de groupes discrets, et éventuellement de passer des représentations linéaires de dimension finie à des actions sur des espaces plus généraux.

1.2 Le théorème de superrigidité de Margulis (1974)

Théorème 1 (Margulis, [Ma2]). *Soient G , H des groupes algébriques semi-simples sur des corps locaux, sans facteurs compacts. On suppose que G a un rang réel ≥ 2 . Soit Γ un réseau irréductible de G .*

Tout homomorphisme $\Gamma \rightarrow H$ dont l'image est non bornée et Zariski dense s'étend en un homomorphisme $G \rightarrow H$.

Nous ne définirons pas tous les termes, renvoyant à la littérature classique, [Bo1], [Ma3]. La géométrie commence lorsqu'on voit les groupes algébriques G et H comme groupes d'isométries d'espaces métriques. Depuis E. Cartan [Ca], on sait qu'il existe un dictionnaire entre les groupes de Lie semi-simples sur \mathbf{R} ou \mathbf{C} et les *espaces symétriques* sans facteurs euclidiens. Une variété riemannienne est symétrique si pour chaque point x , la symétrie géodésique, qui renverse toutes les géodésiques passant par x , est une isométrie. Ce dictionnaire a été étendu par F. Bruhat et J. Tits [BT] au cas des corps locaux non archimédiens. La classe des espaces symétriques est remplacée par celle des *immeubles euclidiens*. Ce dictionnaire permet de reformuler le résultat de Margulis.

Théorème 2 *Soient X, Y des espace symétriques ou des immeubles de dimension finie, sans facteurs euclidiens ni compacts. On suppose que X est de rang ≥ 2 . Soit Γ un groupe discret irréductible d'isométries de X tel que $\text{Vol}(\Gamma \backslash X) < +\infty$.*

Toute action isométrique réductive de Γ sur Y laisse stable ou bien un point, ou bien un sous-ensemble convexe de Y qui est pluriisométrique à un produit de facteurs irréductibles de X .

Certains termes sont plus aisés à définir dans ce langage. Lorsque X s'écrit non trivialement comme un produit riemannien, un groupe d'isométries de X est dit *irréductible* s'il ne contient aucun sous-groupe de type fini qui préserve la décomposition en produit. Toujours lorsque X s'écrit non trivialement comme un produit riemannien, on peut modifier la métrique en multipliant celle de chaque facteur par une constante différente. On obtient ainsi les espaces *pluriisométriques* à X . Le *rang* de X est la dimension maximale d'un espace euclidien qu'on peut plonger isométriquement dans X . La restriction sur le rang a pu être partiellement levée.

Théorème 3 (Corlette [Co], Gromov-Schoen [GS]). *Les résultats précédents s'étendent au cas où X est un espace hyperbolique quaternionien de dimension > 4 ou le plan hyperbolique des octonions.*

Remarque 1 *En revanche, ils ne s'étendent pas aux autres espaces symétriques de rang un (les espaces hyperboliques réels \mathbf{RH}^n et complexes \mathbf{CH}^n) ni aux immeubles de rang un.*

1.3 Arithméticité

Margulis a montré qu'on pouvait déduire d'un théorème de rigidité le fait que les réseaux sont arithmétiques, [Ma1].

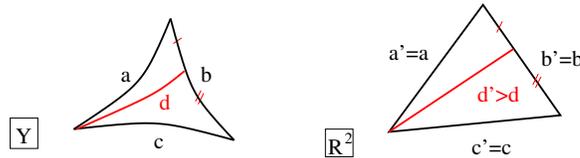
Corollaire 2 *Les réseaux irréductibles des groupes de Lie semi-simples G autres que $PO(n, 1) = \text{Isom}(\mathbf{RH}^n)$ et $PU(n, 1) = \text{Isom}(\mathbf{CH}^n)$ sont arithmétiques, i.e. obtenus (au relèvement à un produit $G \times L$ où L est compact et à commensurabilité près) comme le groupe des matrices entières dans une représentation linéaire de G définie sur \mathbf{Q} .*

Comme les groupes algébriques sur \mathbf{Q} ont été classifiés (J. Tits, [Ti1]), on aboutit à une classification des réseaux à commensurabilité près. C'est sans doute la conséquence la plus frappante du théorème de superrigidité.

1.4 Espaces $CAT(0)$

Dès 1925, E. Cartan a observé que les espaces symétriques de type non compact satisfont des inégalités métriques là où l'espace euclidien satisfait des identités. Il s'en est servi pour montrer que tout groupe compact d'isométries possède un point fixe, et par conséquent, que les sous-groupes compacts maximaux du groupe des isométries sont deux à deux conjugués.

Définition 3 Soit Y un espace métrique géodésique. Etant donné un triangle de côtés a, b et c dans Y , on construit le triangle de même côtés $a' = a, b' = b$ et $c' = c$ dans le plan euclidien. A un point u du côté b correspond un point u' qui divise le côté b' dans les mêmes proportions. On note d (resp. d') la distance de u (resp. u') au sommet opposé. On dit que Y est $CAT(0)$ si pour tout triangle, $d' \geq d$.



L'observation de Cartan entraîne que les espaces symétriques de type non compact sont $CAT(0)$. De même, les arbres, les immeubles euclidiens sont géodésiques et $CAT(0)$.

Pour une variété riemannienne, être $CAT(0)$ est équivalent à être simplement connexe et à courbure sectionnelle négative ou nulle. Un produit d'espaces $CAT(0)$ est $CAT(0)$.

1.5 Généralisation

On peut baptiser superrigidité géométrique le programme suivant.

Question 1. Soit X un espace métrique. Trouver des conditions sur X pour que pour tout groupe discret Γ d'isométries de X , de covolume fini, toute action isométrique de Γ sur un espace $CAT(0)$ géodésique et complet Y ou bien possède un point fixe, ou bien laisse stable un sous-ensemble convexe de Y pluriisométrique à X .

Voici le type d'applications envisagées.

- Expliquer en quoi les réseaux de $PU(n, 1)$ ne sont pas superrigides.
- Etudier les représentations de dimension infinie des réseaux.
- Etudier les actions sur des variétés compactes, au moyen de l'action induite sur un espace auxiliaire, comme l'espace des métriques riemanniennes mesurables sur la variété.
- Prouver que certains groupes ne sont pas *linéaires*, i.e. isomorphes à des groupes de matrices.

Pour les trois premières applications, on renvoie au survol [P1], bien qu'il date un peu, et au texte de J. Maubon dans ce volume. Pour compléter ces survols, voir les trois références récentes [Kl], [Mo], [GKM]. Dans ces notes, on s'intéresse spécialement à la dernière, plus récente.

1.6 Groupes non linéaires

Il existe des groupes de présentation finie qui ne possèdent aucune représentation linéaire de dimension finie non triviale (par exemple, les groupes infinis simples,

mais il y en a d'autres, voir [Bas]). Est-ce le cas général ? Autrement dit, un groupe générique admet-il une représentation linéaire de dimension finie non triviale ?

Question 2. (*Gromov 2003*). Soit Γ un groupe aléatoire modelé sur un graphe obtenu en subdivisant un graphe de tour de taille suffisamment grand par rapport au bas de son spectre. Montrer qu'avec probabilité tendant vers 1 lorsque le nombre de subdivisions tend vers l'infini (la valence restant bornée), pour tout n , tout homomorphisme $\Gamma \rightarrow Gl(n, \mathbf{C})$ est d'image finie.

La terminologie des groupes modelés sur des graphes sera expliquée au paragraphe 5.2.

Il est vraisemblable que les groupes aléatoires, dans certains régimes, n'ont pas de quotient fini du tout. Mais ceci semble hors de portée des méthodes superrigides.

Le but de ces notes est d'exposer informellement quelques uns des ingrédients qui pourraient apporter une réponse à la question 2.

Je suis reconnaissant à M. Gromov, F. Haglund, M. Pichot et L. Silberman pour l'aide qu'ils m'ont apportée lors de la rédaction de ce texte.

2 Superrigidité et finitude des représentations

Voyons d'abord comment déduire la finitude des représentations de la superrigidité.

Définition 4 *On dit qu'un groupe Γ possède la propriété FSI si toute action isométrique de Γ sur un espace symétrique sans facteur compact ou un immeuble euclidien associé à un groupe algébrique réductif sur un corps local non archimédien possède un point fixe.*

Soit Γ un groupe qui possède la propriété FSI. Etant donnée une représentation linéaire indécomposable de dimension finie, i.e. un homomorphisme $h : \Gamma \rightarrow Gl(n, \mathbf{C})$, on montre successivement que

- h est localement rigide, i.e. un homomorphisme $h' : \Gamma \rightarrow Gl(n, \mathbf{C})$ suffisamment voisin de h est conjugué à h ;
- à conjugaison près, h est à valeurs dans $Gl(n, \bar{\mathbf{Q}})$;
- après extension des scalaires et restriction à un sous-groupe d'indice fini de Γ , on obtient un homomorphisme \tilde{h} à valeurs dans $Gl(nd, \mathbf{Z})$;
- \tilde{h} est à valeurs dans un sous-groupe compact de $Gl(nd, \mathbf{C})$.

Il en résulte que $h(\Gamma)$ est fini.

2.1 Cohomologie

Lemme 5 *Soit ρ une représentation unitaire d'un groupe Γ sur un espace de Hilbert \mathcal{H}_ρ . Il y a une bijection entre l'ensemble des actions isométriques affines de Γ sur \mathcal{H}_ρ (à conjugaison près par une translation), de partie linéaire ρ , et l'espace de cohomologie $H^1(\Gamma, \rho)$. La classe associée à une action s'annule si et seulement si l'action possède un point fixe.*

Preuve. On suppose donnée une action isométrique affine de Γ sur \mathcal{H}_ρ , de partie linéaire ρ . Etant donné un point $v_0 \in \mathcal{H}_\rho$, on pose, pour $g \in \Gamma$, $\eta_0(g) = gv_0 - v_0$. Alors η_0 est un 1-cocycle sur Γ à valeurs dans \mathcal{H}_ρ . Sa classe de cohomologie ne dépend pas du choix de v_0 . En fait, chaque cocycle η_1 cohomologue à η_0 correspond à un autre choix v_1 du point base. Par conséquent, si l'action possède un point fixe, η est cohomologue à zéro et réciproquement.

Si une seconde action $(g, v) \mapsto g \cdot v$ donne le même cocycle, alors $gv_0 - v_0 = \eta(g) = g \cdot v_0 - v_0$, donc $gv_0 = g \cdot v_0$, et les deux actions, qui ont même partie linéaire, coïncident.

Inversement, soit η un 1-cocycle sur Γ à valeurs dans le Γ -module \mathcal{H}_ρ . On construit une action (à gauche) isométrique affine de Γ sur \mathcal{H}_ρ en posant, pour $v \in \mathcal{H}_\rho$ et $g \in \Gamma$,

$$gv = \rho(g)(v) + \eta(g)$$

Le cocycle η_0 qui lui est associé, lorsqu'on choisit comme point base $v_0 = 0$, est η , par construction. ■

On conclut que, pour un groupe ayant la propriété *FSI*, $H^1(\Gamma, \rho) = 0$ pour toute représentation unitaire ρ de dimension finie.

Lorsque ρ est la représentation triviale, on trouve que $H^1(\Gamma, \mathbf{C}) = 0$. En particulier, tout homomorphisme de Γ dans \mathbf{C} est trivial.

2.2 Caractères

On montre que si Γ est un groupe ayant la propriété *FSI*, alors tout homomorphisme $h : \Gamma \rightarrow Gl(1, \mathbf{C})$ est d'image finie. On se sert (sans le prouver) du joli lemme suivant.

Lemme 6 (J. Tits, [Ti2] page 243). *Soit F un corps de type fini et $z \in F$ un élément qui n'est pas une racine de l'unité. Il existe une valeur absolue sur F telle que $|z| \neq 1$.*

Soit Γ un groupe ayant la propriété *FSI*. Soit $\chi : \Gamma \rightarrow \mathbf{C}^*$ un homomorphisme. Montrons par l'absurde que pour tout γ in Γ , $z = \chi(\gamma)$ est une racine de l'unité. On applique le lemme 6 au sous-corps F de \mathbf{C} engendré par $\chi(\Gamma)$. Comme Γ est de type fini, F est de type fini. Soit $|\cdot| : F^* \rightarrow \mathbf{R}_+^*$ une valeur absolue telle que $|z| \neq 1$. Alors $\log |\chi| : \Gamma \rightarrow \mathbf{R}$ est un homomorphisme non trivial, contradiction.

Par conséquent, χ est à valeurs dans les racines de l'unité. Comme Γ est de type fini, il existe N tel que χ prenne ses valeurs dans le groupe des racines N -èmes de l'unité. (On trouve des considérations voisines dans [Bas]).

On conclut que pour tout homomorphisme $h : \Gamma \rightarrow Gl(n, \mathbf{C})$, il existe un sous-groupe Γ' d'indice fini dans Γ tel que $h(\Gamma') \subset Sl(n, \mathbf{C})$.

Dans la suite, on fera comme si $\Gamma' = \Gamma$.

2.3 Unitarisabilité

Soit $h : \Gamma \rightarrow Sl(n, \mathbf{C})$ un homomorphisme. On fait agir Γ via h sur l'espace symétrique $Sl(n, \mathbf{C})/SU(n)$. Par *FSI*, il existe un point fixe, c'est un sous-groupe compact conjugué de $SU(n)$ qui contient $h(\Gamma)$. Autrement dit, h est conjuguée à une représentation unitaire.

Le lemme 5 s'étend donc à toutes les représentations linéaires de dimension finie de Γ .

2.4 Rigidité locale

On s'intéresse à l'espace $Rep = Hom(\Gamma, Gl(n, \mathbf{C}))/Gl(n, \mathbf{C})$ des classes d'équivalence de représentations unitaires de Γ . Plus précisément, à sa structure locale au voisinage d'une représentation h . Notons $C(h)$ le centralisateur de $h(\Gamma)$ dans $Gl(n, \mathbf{C})$. Depuis A. Weil [W2], on sait construire dans un produit de copies de $Gl(n, \mathbf{C})$ une sous-variété analytique $C(h)$ -invariante $PreRep$ dont l'espace tangent s'identifie à $H^1(\Gamma, \rho)$ où $\rho = Ad \circ h$, et une application $C(h)$ -équivariante $\zeta : PreRep \rightarrow H^2(\Gamma, \rho)$ telles que Rep s'identifie au quotient par $C(h)$ du sous-ensemble analytique $C(h)$ -invariant $\zeta^{-1}(0)$ de $PreRep$ (le couple $(PreRep, \zeta)$ s'appelle parfois modèle de Kuranishi, en référence à [Ku]). L'annulation de $H^1(\Gamma, \rho)$ entraîne donc que la classe d'équivalence de h est un point isolé de Rep .

Démontrons directement un cas particulier de ce théorème.

Lemme 7 *Soit Γ un groupe de type fini. Soit H un groupe de Lie. Soit $h : \Gamma \rightarrow H$ un homomorphisme dont l'image a un centralisateur discret dans H . On suppose que $H^1(\Gamma, Ad \circ h) = 0$. Alors tout homomorphisme $h' : \Gamma \rightarrow H$ suffisamment proche de h est conjugué à h .*

Preuve. On considère $Hom(\Gamma, H)$ comme le sous-ensemble de H^Γ défini par l'équation $\Phi(f) = 1$ où $\Phi : H^\Gamma \rightarrow H^{\Gamma \times \Gamma}$, est définie comme suit. Etant donnée une fonction $f : \Gamma \rightarrow H$, $\Phi(f)$ est la fonction sur $\Gamma \times \Gamma$ définie par

$$\Phi(f)(g, g') = f(gg')^{-1}f(g)f(g').$$

Ramenons tous les vecteurs tangents à H dans l'algèbre de Lie \mathcal{H} par translation à gauche. Alors l'espace tangent en h à H^Γ s'identifie aux fonctions de Γ dans \mathcal{H} , i.e. aux 1-cochaînes sur Γ à valeurs dans \mathcal{H} , et l'espace tangent en 1 à $H^{\Gamma \times \Gamma}$ aux 2-cochaînes sur Γ à valeurs dans \mathcal{H} . La différentielle de Φ en h s'identifie (au signe près) au cobord relatif à la représentation $\rho = Ad \circ h$: si $\eta \in C^1(\Gamma, \mathcal{H}_\rho)$, $h\eta \in T_h H^\Gamma$ et

$$D_h \Phi(h\eta) = -d\eta \in C^2(\Gamma, \mathcal{H}_\rho).$$

L'action de H par conjugaison sur H^Γ définit une application $\Psi_h : H \rightarrow H^\Gamma$ comme suit. Etant donné $k \in H$, $\Psi_h(k)$ est la fonction sur Γ définie par

$$\Psi_h(k)(g) = Ad_k(h(g)) = k^{-1}h(g)k.$$

Comme h est un homomorphisme, $\Phi \circ \Psi_h \equiv 1$. Identifions $T_1H = \mathcal{H}$ à l'espace des 0-cochaînes à valeurs dans \mathcal{H} . Alors la différentielle de Ψ_h en 1 s'identifie (au signe près) au cobord : si $v \in \mathcal{H}$, qu'on voit comme une 0-cochaîne c ,

$$D_1\Psi_h(v) = -dc \in C^1(\Gamma, \mathcal{H}_\rho).$$

On remarque que $\ker(d) = H^0(\Gamma, \mathcal{H}_\rho) = \{v \in \mathcal{H} \mid \forall g, Ad_{h(g)}(v) = v\}$ est l'algèbre de Lie du centralisateur de $h(\Gamma)$ dans H . Par hypothèse, cette algèbre de Lie est nulle. On a supposé aussi que $H^1(\Gamma, \mathcal{H}_\rho) = 0$. Par conséquent, $D_1\Psi_h$ est injective, et son image coïncide avec le noyau de $D_h\Phi$. Cette propriété est ouverte sur $Hom(\Gamma, H)$. Elle reste donc vraie pour h' proche de h . Autrement dit, Φ est de rang constant sur $\Phi^{-1}(1)$ au voisinage de h . Par conséquent, $\Phi^{-1}(1)$ est une variété au voisinage de h , dont la dimension est égale à celle de l'orbite $\Psi_h(H)$, qu'elle contient. On conclut que, dans un voisinage de h , $Hom(\Gamma, H)$ coïncide avec l'orbite de h .

Dans le paragraphe précédent, on a fait comme si H^Γ et $H^{\Gamma \times \Gamma}$ étaient des variétés de dimension finie. Voici pourquoi on peut le faire. Soit S un système générateur fini symétrique de Γ . Choisissons, pour chaque élément $g \in \Gamma$, un mot $w(g)$ dans l'alphabet S qui représente g . Toute fonction $f : S \rightarrow H$ (resp. $S \rightarrow \mathcal{H}$) se prolonge en une fonction $w(f) : \Gamma \rightarrow H$ (resp. $\Gamma \rightarrow \mathcal{H}$), définie par $w(f)(g) = f(w(g))$. Si h est un homomorphisme (resp. un 1-cocycle), il est uniquement déterminé par sa restriction à $S : h = w(h|_S)$. De plus, comme $Hom(\Gamma, H)$ est un ensemble analytique, pour vérifier qu'une fonction f est un homomorphisme (resp. qu'une 1-cochaîne η est un cocycle), il suffit de vérifier l'équation $f(gg') = f(g)f(g')$ (resp. $\eta(gg') = Ad_{h(g')}(\eta(g)) + \eta(g')$) pour un sous-ensemble fini $R \subset \Gamma \times \Gamma$ de couples (g, g') . On peut donc remplacer $\Phi : H^\Gamma \rightarrow H^{\Gamma \times \Gamma}$ par $\Phi_{S,R} = \pi_R \circ \Phi \circ w : H^S \rightarrow H^R$. ■

2.5 Algébricité

Soit Γ un groupe de type fini possédant la propriété *FSI*. Soit h une représentation indécomposable de dimension finie de Γ . Par unitarisabilité, h est irréductible. Par le lemme de Schur, le centralisateur de $h(\Gamma)$ dans le groupe spécial linéaire est réduit au centre $\{\pm 1\}$. D'après le lemme 5, $H^1(\Gamma, Ad \circ h) = 0$. Par rigidité locale, il existe un voisinage V de h dans $Hom(\Gamma, Sl(n, \mathbf{C}))$ tel que toute représentation contenue dans V soit conjuguée à h . Comme $Hom(\Gamma, Sl(n, \mathbf{C}))$ est une sous-variété algébrique affine définie sur \mathbf{Q} de $Gl(n, \mathbf{C})^S$, V contient un point défini sur $\bar{\mathbf{Q}}$. C'est un homomorphisme conjugué de h dont l'image est contenue dans $Sl(n, \bar{\mathbf{Q}})$. On continue de le noter h .

2.6 Intégralité

Comme Γ est de type fini, $h(\Gamma)$ est contenu dans $Sl(n, F)$ où F est une extension de \mathbf{Q} de degré fini d . Chaque élément de F agit par multiplication sur F , d'où un plongement $F \rightarrow End_{\mathbf{Q}}(F)$, qui induit un plongement $Sl(n, F) \rightarrow End_F(F^n) \rightarrow End_{End_{\mathbf{Q}}(F)}(F^n) \simeq End_{\mathbf{Q}}(\mathbf{Q}^{nd})$, appelé *extension des scalaires*. On note \tilde{h} sa composée avec h . L'image de \tilde{h} est contenue dans $Sl(nd, \mathbf{Q})$.

Soit p un nombre premier. On fait agir Γ via \tilde{h} sur l'immeuble de $Sl(nd, \mathbf{Q}_p)$. Par superrigidité, il existe un point fixe, donc $\tilde{h}(\Gamma)$ est contenu dans un groupe compact, commensurable à $Sl(nd, \mathbf{Z}_p)$. Autrement dit, il existe un sous-groupe $\Gamma_p \subset \Gamma$ d'indice fini tel que $\tilde{h}(\Gamma_p) \subset Sl(nd, \mathbf{Z}_p)$.

L'étape précédente, appliquée à tous les diviseurs premiers des dénominateurs des coefficients des matrices $\tilde{h}(s)$, $s \in S$, donne un sous-groupe $\Gamma' \subset \Gamma$ d'indice fini tel que $\tilde{h}(\Gamma') \subset Sl(nd, \mathbf{Z})$.

On fait agir Γ via \tilde{h} sur l'espace symétrique $Sl(nd, \mathbf{C})/SU(nd)$. Par *FSI*, il existe un point fixe. Autrement dit, $\tilde{h}(\Gamma)$ est contenu dans un sous-groupe compact K , conjugué de $SU(nd)$.

On conclut que $\tilde{h}(\Gamma') \subset K \cap Sl(nd, \mathbf{Z})$ est discret et relativement compact donc fini. Il en résulte que $h(\Gamma)$ est fini. Le cas général se ramène immédiatement au cas indécomposable.

Remarque 8 *Pour être entièrement géométrique, on peut s'affranchir de la discussion des caractères, et de son ingrédient algébrique, le lemme de Tits, au prix de compliquer légèrement les détails des paragraphes unitarisabilité, rigidité locale et algébricité.*

On remarque d'abord qu'en l'absence d'homomorphisme à valeurs dans \mathbf{R} , toute représentation tombe dans le sous-groupe de $Gl(n, \mathbf{C})$ formé des matrices dont le déterminant est de module 1. Ce groupe agit sur l'espace symétrique de $Sl(n, \mathbf{C})$ avec des stabilisateurs compacts, d'où l'unitarisabilité. Pour la rigidité locale, on remarque que le lemme 7 et sa preuve restent vrais sous l'hypothèse plus faible que le centralisateur de la représentation coïncide avec le centre du groupe de Lie H . Cela dispense d'avoir recours au groupe spécial linéaire au paragraphe algébricité. Une fois la représentation à valeurs dans $Gl(nd, \mathbf{Q})$, on remarque que la valuation p -adique du déterminant donnant un homomorphisme, nécessairement trivial, à valeurs dans \mathbf{Z} , il vaut ± 1 , donc un sous-groupe d'indice au plus 2 est contenu dans $Sl(nd, \mathbf{Q})$.

3 Applications harmoniques équivariantes

Soit Γ un groupe qui agit isométriquement sur des espaces X et Y . Un point fixe de l'action, c'est la même chose qu'une application constante et équivariante de X dans Y . On va donc chercher une application constante parmi les applications équivariantes f de X dans Y . Pour cela, on cherche à minimiser la "variation quadratique" de f , communément appelée *énergie*. Les applications qui minimisent l'énergie sont appelées *harmoniques*.

Cette stratégie remonte explicitement à Eells et Sampson en 1964. On peut même remonter plus loin. On a vu en 5 qu'une action isométrique affine de Γ sur un espace de Hilbert revient à se donner une représentation unitaire ρ ainsi qu'une classe de cohomologie dans le $H^1(\Gamma, \rho)$. L'idée de minimiser la norme L^2 dans une classe de cohomologie est à la base de la théorie de Hodge, née dans les années 30. Ce point de vue est développé dans [P1].

Ici, on décrit, en suivant M.T. Wang, [Wa] et H. Izeki et S. Nayatani [IN], une version discrète, élémentaire, de la notion d'application harmonique. Dans le cas particulier des actions isométriques affines sur des espaces de Hilbert, cette version discrète a, elle aussi, un glorieux passé (Garland, 1972, dans un langage cohomologique).

3.1 Énergie et applications harmoniques

Désormais, on suppose que l'espace X est le revêtement universel d'un complexe simplicial fini dont Γ est le groupe fondamental. On va définir une énergie pour les applications équivariantes de X

Définition 9 *Soit C un complexe simplicial. Un poids sur C est une fonction positive m sur les simplexes telle que, pour tout k -simplexe σ , $m(\sigma)$ est égale à la somme des poids des $k + 1$ -simplexes qui contiennent σ ,*

$$m(\sigma) = \sum_{\sigma \subset \tau} m(\tau).$$

Par extension, on note $m(\emptyset) = \sum_{c \in C} m(c)$.

Exemple 10 *Si C est de dimension 2, on pose $m = 1$ sur les 2-simplexes, et on propage aux 1-simplexes puis aux 0-simplexes en respectant la propriété de poids.*

Définition 11 *Soit (C, m) un complexe simplicial pondéré fini. Soit Y un espace métrique. Sur l'espace des fonctions de C dans Y , on met la distance "produit pondéré"*

$$d(g, g') = \left(\sum_{c \in C} m(c) d(g(c), g'(c))^2 \right)^{1/2}.$$

Définition 12 *Etant donné un complexe simplicial pondéré fini (C, m) et une application $f : C \rightarrow Y$ à valeurs dans un espace métrique, l'énergie de f est*

$$E(f) = \frac{1}{2} \sum_{c \in C} \sum_{c' \sim c} m(c, c') d(f(c), f(c'))^2,$$

où $c \sim c'$ signifie que c et c' sont les extrémités d'une même arête.

Voici une version équivariante des définitions précédentes.

Définition 13 *Soit Z un complexe simplicial fini, de groupe fondamental Γ , soit X son revêtement universel. On se donne un poids m sur Z . Soit Y un espace métrique sur lequel Γ agit isométriquement. Sur l'espace des applications équivariantes $X \rightarrow Y$, on met la distance*

$$d(f, f') = \left(\sum_z m(z) d(f(z), f'(z))^2 \right)^{1/2},$$

où c est un sommet de X au-dessus de z . L'énergie de f est

$$E(f) = \frac{1}{2} \sum_{z \in Z} \sum_{z' \sim z} m(z, z') d(f(c), f(c'))^2,$$

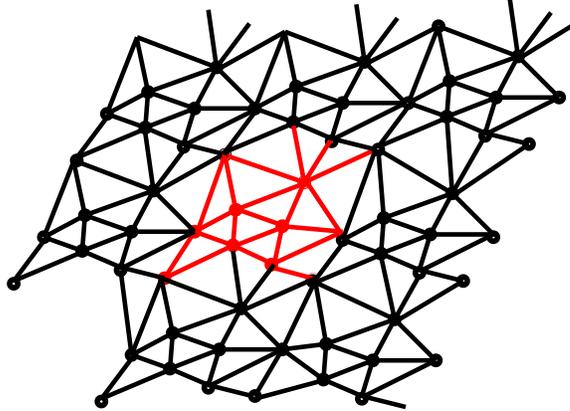
où (c, c') est une arête de X au-dessus de l'arête (z, z') de Z .

Remarque 14 L'espace $Y^{\Gamma \backslash X}$ des applications équivariantes $X \rightarrow Y$ est isométrique à un produit d'espaces homothétiques à Y . Si Y est $CAT(0)$, $Y^{\Gamma \backslash X}$ est lui-même $CAT(0)$, et l'énergie est une fonction convexe sur $Y^{\Gamma \backslash X}$.

En effet, $t \mapsto f_t$ est une géodésique parcourue à vitesse constante de $Y^{\Gamma \backslash X}$ si et seulement si pour tout $x \in X$, $t \mapsto f_t(x)$ est une géodésique parcourue à vitesse constante de Y . D'autre part, dans un espace $CAT(0)$, étant données deux géodésiques $t \mapsto s(t)$ et $t \mapsto s'(t)$ parcourues à vitesse constante, la fonction $(t, t') \mapsto d(s(t), s'(t'))$ est convexe sur \mathbf{R}^2 .

Définition 15 Une application équivariante $f : X \rightarrow Y$ est dite harmonique si elle minimise localement l'énergie E , i.e. si un petit déplacement équivariant de l'image d'une orbite de sommets ne diminue pas l'énergie.

Autrement dit, on interprète X comme un arrangement périodique de ressorts, et f comme une déformation périodique des ressorts (voir figure). E représente l'énergie potentielle élastique par maille. Une application f est harmonique si elle représente une position d'équilibre.



3.2 Barycentre, lien et équation des applications harmoniques

Dans l'espace euclidien, le carré u de la distance à un point est une fonction uniformément strictement convexe : le long d'une géodésique $t \mapsto y(t)$ parcourue à vitesse 1, $u(y(t)) - t^2$ est convexe. Par comparaison, cette propriété s'étend aux espaces géodésiques $CAT(0)$. Elle se généralise aux combinaisons à coefficients positifs de carrés de distances à des points, ce qui permet de montrer que ces fonctions atteignent leur minimum.

Lemme 16 Soit Y un espace métrique $CAT(0)$ complet, soit μ une mesure de probabilité sur Y . Posons, pour $y \in Y$, $u(y) = d(\mu, y)^2 = \int_Y d(z, y)^2 d\mu(z)$. Alors

$$\text{diam}(\{u \leq \epsilon^2 + \inf u\}) \leq 2\epsilon.$$

Par conséquent, u atteint son minimum sur Y , en un unique point y_0 , et on a, pour tout $y \in Y$,

$$u(y) \geq u(y_0) + d(y, y_0)^2.$$

Preuve. Soit $t \mapsto s(t)$, $t \in [-L, L]$, un segment géodésique de vitesse 1, reliant deux points où $u \leq \epsilon^2 + \inf u$. La fonction $t \mapsto v(t) = u(t) - \inf u - t^2$ est convexe, donc $0 \leq v(0) \leq \frac{1}{2}(v(-L) + v(L)) \leq \epsilon^2 - L^2$, donc $L \leq \epsilon$. ■

Etant donné un complexe simplicial pondéré fini (C, m) et une application $g/C \rightarrow Y$, on applique ce lemme à la mesure image par g de la mesure de probabilité $m/m(\emptyset)$.

Définition 17 Soit (C, m) un complexe simplicial pondéré fini, Y un espace métrique $CAT(0)$ complet, $g : C \rightarrow Y$ une application. L'unique point de Y où la fonction $y \mapsto d(g, y)^2$ atteint son minimum est appelé barycentre de g .

Exemple 18 Lorsque Y est un espace de Hilbert, le barycentre métrique coïncide avec le barycentre affine $\text{bar}(g) = (\sum m(c)g(c))/\sum m(c)$.

Etant donné un complexe simplicial pondéré (X, m) , l'étoile d'un sommet x est la réunion des simplexes de X qui contiennent x , et le lien de x est la réunion des simplexes de l'étoile qui ne contiennent pas x .

Le lien de x hérite d'une pondération : si σ est un simplexe du lien, $x \cup \sigma$ est un simplexe de X , et on pose $m_{\text{lien}}(\sigma) = m(x \cup \sigma)$.

Proposition 19 Soit (Z, m) un complexe simplicial pondéré fini de groupe fondamental Γ , soit X son revêtement universel. Soit Y un espace métrique $CAT(0)$. Une application équivariante $f : X \rightarrow Y$ est harmonique si et seulement si pour tout sommet $x \in X$, $f(x)$ coïncide avec le barycentre de la restriction de f au lien de x ,

$$f(x) = \text{bar}(f|_{\text{lien}(x)}).$$

Preuve. En effet, si on déplace de façon équivariante l'image de l'orbite d'un sommet x de X , de sorte que $f(x)$ est remplacé par $y \in Y$, l'énergie de f change de

$$\sum_{x' \in \text{lien}(x)} m(x, x')(d(f(x'), y)^2 - d(f(x'), f(x))^2).$$

Ce terme est positif ou nul pour tout y si et seulement si $f(x) = \text{bar}(f|_{\text{lien}(x)})$. ■

Exemple 20 Lorsque $Y = \mathbf{R}$, on peut interpréter X comme un circuit électrique, une fonction f comme le potentiel électrique aux sommets du circuit, $m(x, x')$ comme la conductance de la branche reliant x à x' , $m(x, x')(f(x') - f(x))$ comme le courant qui passe dans cette branche. La loi de Kirchoff énonce alors que f est harmonique.

3.3 Bas du spectre

Définition 21 Soit (C, m) un complexe simplicial pondéré, Y un espace métrique $CAT(0)$, $g : C \rightarrow Y$ une application non constante. Le quotient de Rayleigh de g est

$$RQ(g) = \frac{E(g)}{d(g, \text{bar}(g))^2}.$$

(La distance g à l'application constante $\text{bar}(g)$ est celle définie en 11).

Le bas du spectre de (C, m) relativement à l'espace Y est la borne inférieure des quotients de Rayleigh des applications non constantes de C dans Y ,

$$\lambda(C, m, Y) = \inf_{g: C \rightarrow Y} RQ(g).$$

Exemple 22 Lorsque $Y = \mathbf{R}$, le bas du spectre coïncide avec la plus petite valeur propre non nulle du laplacien discret

$$g \mapsto \Delta g, \quad \text{où} \quad \Delta g(c) = \sum_{c' \sim c} m(c, c')(g(c) - g(c')).$$

On donnera au paragraphe 4 des exemples de bas de spectre de graphes.

Exemple 23 $\lambda(C, m, Y_1 \times Y_2) = \min\{\lambda(C, m, Y_1), \lambda(C, m, Y_2)\}$.

En effet, une application $g : C \rightarrow Y_1 \times Y_2$ s'écrit $g = (g_1, g_2)$, le barycentre $\text{bar}(g) = (\text{bar}(g_1), \text{bar}(g_2))$, $RQ(g) = RQ(g_1)$ (resp. $RQ(g_2)$) si g_2 (resp. g_1) est constante, et est un barycentre de $RQ(g_1)$ et de $RQ(g_2)$ sinon.

Par conséquent, si Y est un espace de Hilbert, alors pour tout complexe simplicial pondéré fini (C, m) , $\lambda(C, m, Y) = \lambda(C, m, \mathbf{R})$.

3.4 Cône tangent

Dans l'espace euclidien, si $s(t) = y + tv$ et $s'(t) = y + tv'$ sont deux demi-droites issues de y , on a pour tout t l'identité

$$|v - v'| = \frac{d(s(t), s'(t))}{t}.$$

Dans un espace $CAT(0)$, étant données deux géodésiques s et s' d'origine y , parcourues à vitesse constante, la fonction $t \mapsto \frac{d(s(t), s'(t))}{t}$ est croissante. On peut donc poser

$$d(s, s') = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d(s(t), s'(t))}{t},$$

et identifier s et s' si $d(s, s') = 0$.

Définition 24 *On obtient un espace métrique appelé cône tangent de Y en y et noté $T_y Y$.*

C'est à nouveau un espace $CAT(0)$, car c'est une limite d'espaces $CAT(0)$. Il vient avec une application $\pi : Y \rightarrow T_y Y$ qui est isométrique le long de chaque géodésique issue de y , et diminue les distances en général. π envoie un point y' sur le segment géodésique de y à y' paramétré à vitesse constante sur $[0, 1]$.

Exemple 25 *Si Y est une variété riemannienne simplement connexe à courbure négative ou nulle (par exemple, un espace symétrique de type non compact), ses cônes tangents sont des espaces de Hilbert.*

Si Y est un arbre, ses cônes tangents sont des réunions de demi-droites attachées à leur extrémité.

Proposition 26 (Wang,[Wa]). *Pour tout complexe simplicial pondéré fini (C, m) et tout espace $CAT(0)$ Y ,*

$$\lambda(C, m, Y) \geq \inf_{y \in Y} \lambda(C, m, T_y Y).$$

Preuve. Etant donnée $g : C \rightarrow Y$, on note $g' = \pi \circ g$ où π est la projection $Y \rightarrow T_{bar(g)} Y$. Alors $bar(g')$ est le sommet du cône. En effet, si $t \mapsto s(t)$ est une géodésique dans Y , issue de $bar(g)$ et parcourue à vitesse constante, et si $y \in Y$, alors la dérivée en $t = 0$ de la fonction $t \mapsto d(y, s(t))$ s'exprime en fonction des points $\pi(s(1))$ et $\pi(y)$ du cône tangent ([BH], corollaire II.3.6). Comme le cône tangent au cône en son sommet est le cône lui-même, $\pi \circ \pi = \pi$, et les fonctions $t \mapsto d(y, s(t))$ et $t \mapsto d(\pi(y), \pi(s(t)))$ ont même dérivée en $t = 0$. En faisant la moyenne sur C , on trouve que les fonctions $t \mapsto d(g, s(t))^2$ et $t \mapsto d(\pi \circ g, \pi(s(t)))^2$ ont même dérivée en $t = 0$. Comme la première atteint un minimum en 0, il vient

$$\frac{d}{dt} d(\pi \circ g, \pi(s(t)))^2 \Big|_{t=0} \geq 0.$$

Comme cette fonction est convexe, elle atteint aussi un minimum en 0. Cela prouve que $y \mapsto d(g', \pi(y))^2$ atteint son minimum en $bar(g)$, donc $bar(g')$ est le sommet du cône.

Comme π diminue les distances, $E(g') \leq E(g)$. Comme π est isométrique le long des géodésiques issues de $bar(g)$, $d(g', \pi(bar(g)))^2 = d(g, bar(g))^2$. Par conséquent, $RQ(g') \leq RQ(g)$. ■

Exemple 27 *Si Y est une variété riemannienne simplement connexe à courbure négative ou nulle (e.g. un espace symétrique sans facteurs compacts), alors*

$$\lambda(C, m, Y) = \lambda(C, m, \mathbf{R}).$$

On verra plus loin que les arbres partagent la même propriété.

3.5 Formule de Garland

Cette formule a été découverte initialement par H. Garland, [Ga] : en fait, il s'agit d'une famille de formules qui s'appliquent aux cocycles harmoniques des quotients compacts des immeubles euclidiens, dans tous les degrés. A. Borel [Bo2] a su généraliser la première d'entre elles à des complexes simpliciaux quelconques. A. Zuk [Z1] a été le premier à en tirer partie en dimension infinie. La version non linéaire, due à Wang, a été retrouvée par Gromov et Zuk.

Théorème 4 *Soit Z un complexe simplicial fini de groupe fondamental Γ . Soit X son revêtement universel. Soit Y un espace métrique géodésique, $CAT(0)$ et complet. Soit $f : X \rightarrow Y$ une application équivariante. Pour $x \in X$, on note*

$$ED(f, x) = \frac{1}{2}d(f|_{\text{lien}(x)}, f(x))^2,$$

de sorte que

$$E(f) = \sum_{z \in Z} ED(f, x).$$

Alors, si f est harmonique,

$$E(f) = 2 \sum_{z \in Z} RQ(f|_{\text{lien}(z)}) ED(f, x).$$

En particulier, si pour tout $z \in Z$ et tout $y \in Y$, $\lambda(\text{lien}(z), T_y Y) > 1/2$, toute application harmonique équivariante $X \rightarrow Y$ est constante.

Preuve. On convient de poser $m(z, z') = 0$ si z et z' ne sont pas les extrémités d'une même arête. De même, $m(z, z', z'') = 0$ si z, z' et z'' ne sont pas les sommets d'une même face. On continue de noter (x', x'') (resp. (x, x', x'')) un relèvement quelconque à X d'une arête (z, z') (resp. d'une face (z, z', z'')). En utilisant la propriété de poids, il vient

$$\begin{aligned} E(f) &= \frac{1}{2} \sum_{z', z''} m(z', z'') |f(x') - f(x'')|^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{z, z', z''} m(z, z', z'') |f(x') - f(x'')|^2 \\ &= \sum_z E(f|_{\text{lien}(z)}). \end{aligned}$$

D'autre part, pour chaque $x \in X$,

$$\begin{aligned} E(f|_{\text{lien}(x)}) &= RQ(f|_{\text{lien}(x)}) d(f|_{\text{lien}(x)}, \text{bar}(f|_{\text{lien}(x)}))^2 \\ &= RQ(f|_{\text{lien}(x)}) d(f|_{\text{lien}(x)}, f(x))^2 \\ &= 2RQ(f|_{\text{lien}(x)}) ED(f, x). \end{aligned}$$

Supposons que pour tout $z \in Z$ et tout $y \in Y$, $\lambda(\text{lien}(z), T_y Y) \geq \lambda > 0$. Alors pour tout x , $RQ(f|_{\text{lien}(x)}) \geq \lambda$, donc

$$E(f) \geq 2\lambda \sum_z ED(f, x) = 2\lambda E(f).$$

Si $\lambda > 1/2$, cela entraîne que $E(f) = 0$, i.e. que f est constante. ■

Remarque 28 *Pour appliquer le théorème 4, il suffit d'invoquer un théorème d'existence d'application harmonique.*

Il y a des théorèmes généraux d'existence, par exemple lorsque Y est localement compact et sous une hypothèse supplémentaire sur l'action (réductivité), voir Jost [Jo]. Or le cas où Y n'est pas localement compact est intéressant, comme on va le voir au paragraphe suivant.

3.6 Propriété (T) de Kazhdan

Définition 29 (Kazhdan [Ka]). *Un groupe discret Γ possède la propriété (T) si, pour toute représentation unitaire ρ de Γ sans vecteurs invariants et tout système générateur fini S de Γ , il existe une constante $\epsilon(S, \rho) > 0$ telle que pour tout vecteur unitaire $\xi \in \mathcal{H}_\rho$,*

$$\max_{s \in S} |\rho(s)\xi - \xi| \geq \epsilon.$$

La propriété (T) est clairement un phénomène lié à la dimension infinie. On renvoie à [DV] pour une revue de la propriété (T), et notamment des exemples suivants.

Exemple 30 *Les groupes libres, les groupes moyennables n'ont pas la propriété (T). Les réseaux irréductibles des groupes de Lie semi-simples autres que $PO(n, 1)$ et $PU(n, 1)$ ont la propriété (T).*

Proposition 31 *Un groupe discret Γ a la propriété (T) si et seulement si toute action isométrique affine de Γ sur un espace de Hilbert possède un point fixe.*

Preuve. Si Γ a un point fixe dans tout espace de Hilbert affine, alors, d'après le lemme 5, $H^1(\Gamma, \rho) = 0$, donc l'image du cobord $d : C^0(\Gamma, \rho) \rightarrow C^1(\Gamma, \rho)$ est l'espace des 1-cocycles $Z^1(\Gamma, \rho)$. Si \mathcal{H}_ρ n'a pas de vecteurs invariants, d est injectif. Soit S un système générateur fini de Γ . On munit les espaces de cochaînes $C^k(\Gamma, \rho)$ d'une structure hilbertienne en posant

$$|\eta|^2 = \sum_{(s_0, \dots, s_k) \in S^k} |\eta(s_0, \dots, s_k)|^2.$$

Alors d est une bijection continue de $C^0(\Gamma, \rho)$ sur $Z^1(\Gamma, \rho)$. Son inverse est donc continue. On note N la norme de l'inverse. On voit un vecteur unitaire $\xi \in \mathcal{H}_\rho$ comme une 0-cochaîne et $g \mapsto \rho(g)\xi - \xi$ comme le 1-cocycle $d\xi$. Il vient

$$\max_{s \in S} |\rho(g)\xi - \xi| \geq \frac{1}{\sqrt{|S|}} |d\xi| \geq \frac{1}{N\sqrt{|S|}} |\xi| = \frac{1}{N\sqrt{|S|}}.$$

Par conséquent, Γ a la propriété (T).

Pour la réciproque, on renvoie à [DV]. ■

3.7 Inégalité de Garland

Pour contourner le problème de l'existence d'applications harmoniques, on va avoir besoin d'étendre l'identité du théorème 4, valable seulement pour les applications harmoniques, en une inégalité valable pour toutes les applications équivariantes. Cette inégalité fait intervenir une nouvelle quantité qui mesure le défaut d'être harmonique.

Remarque 32 *Cas où Y est un espace de Hilbert. Une application équivariante $f : X \rightarrow Y$ est harmonique si et seulement si $\Delta f = 0$, où le laplacien Δ est défini par*

$$\Delta f(x) = \text{bar}(f(x) - f_{|\text{lien}(x)}).$$

Exemple 33 *Inégalité de Garland, cas linéaire. On suppose que, pour tout point $z \in Z$, $\lambda(\text{lien}(z), \mathbf{R}) \geq \lambda$. Alors, pour toute application équivariante $f : X \rightarrow Y$ où Y est un espace de Hilbert, on a l'inégalité*

$$(2\lambda - 1)E(f) \leq \lambda \|\Delta f\|^2,$$

où $\|\Delta f\|^2 = \sum_z m(z) |\Delta f(x)|^2$ est la norme ℓ^2 de Δf .

En effet, on compare deux expressions de l'énergie,

$$E(f) = \sum_z E(f_{|\text{lien}(x)}), \quad \text{et} \quad E(f) = \sum_z ED(f, x) = \sum_z \frac{1}{2} \|f_{|\text{lien}(x)} - f(x)\|^2.$$

L'hypothèse sur le bas du spectre des liens donne

$$\begin{aligned} E(f) &= \sum_z RQ(f_{|\text{lien}(x)}) \|f_{|\text{lien}(x)} - \text{bar}(f_{|\text{lien}(x)})\|^2 \\ &\geq \lambda \sum_z \|f_{|\text{lien}(x)} - \text{bar}(f_{|\text{lien}(x)})\|^2. \end{aligned}$$

Pour chaque x , la fonction $f_{|\text{lien}(x)} - \text{bar}(f_{|\text{lien}(x)})$ sur $\text{lien}(x)$ est orthogonale aux constantes, en particulier à $\Delta f(x) = f(x) - \text{bar}(f_{|\text{lien}(x)})$, donc, dans $\ell^2(\text{lien}(x), m)$,

$$\begin{aligned} \|f_{|\text{lien}(x)} - f(x)\|^2 &= \|f_{|\text{lien}(x)} - \text{bar}(f_{|\text{lien}(x)})\|^2 + \|f(x) - \text{bar}(f_{|\text{lien}(x)})\|^2 \\ &= \|f_{|\text{lien}(x)} - \text{bar}(f_{|\text{lien}(x)})\|^2 + m(x) |\Delta f(x)|^2. \end{aligned}$$

Il vient

$$\begin{aligned} E(f) &\geq \lambda \sum_z \|f|_{\text{lien}(x)} - f(x)\|^2 - \lambda \sum_z m(x) |\Delta f(x)|^2 \\ &= 2\lambda E(f) - \lambda \|\Delta f\|^2. \blacksquare \end{aligned}$$

Il s'agit de généraliser cette inégalité au cas non linéaire. On va seulement perdre sur la constante. La généralisation non linéaire suivante du laplacien est due à Izeki et Nayatani.

Définition 34 Soit $f : X \rightarrow Y$ une application équivariante. Pour $x \in X$, on note $-\Delta f(x) \in T_{f(x)}Y$ le barycentre de la fonction $f_x = \pi \circ f|_{\text{lien}(x)}$ définie sur le lien de x , à valeurs dans le cône tangent à Y en $f(x)$. On note $|\Delta f(x)|$ la distance de $-\Delta f(x)$ au sommet du cône, et

$$|\Delta f|^2 = \sum_z m(z) |\Delta f(x)|^2.$$

Remarquer que f est harmonique si et seulement si $|\Delta f| = 0$.

Proposition 35 Soit Z un complexe simplicial fini de groupe fondamental Γ . Soit X son revêtement universel. Soit Y un espace métrique géodésique, $CAT(0)$ et complet. Soit $f : X \rightarrow Y$ une application équivariante. On suppose que, pour tout $z \in Z$ et tout $y \in Y$, $\lambda(\text{lien}(z), T_y Y) \geq \lambda > 1/2$. Alors

$$(2\lambda - 1)^2 E(f) \leq 8\lambda^2 |\Delta f|^2.$$

Preuve. Reprenons la preuve de la formule de Garland. La première étape est valable pour toute application équivariante f ,

$$E(f) = \sum_z E(f|_{\text{lien}(x)}).$$

Fixons $x \in X$. Comme la projection $\pi : Y \rightarrow T_{f(x)}Y$ diminue les distances et donc les énergies,

$$E(f|_{\text{lien}(x)}) \geq E(f_x).$$

Par définition du quotient de Rayleigh dans le cône tangent,

$$E(f_x) = RQ(f_x) d(f_x, \text{bar}(f_x))^2.$$

Avec l'hypothèse sur le bas du spectre, on a donc

$$E(f) \geq \lambda \sum_z d(f_x, \text{bar}(f_x))^2. \tag{1}$$

Or on se rappelle que

$$E(f) = \sum_z ED(f, x) = \sum_z \frac{1}{2} d(f|_{\text{lien}(x)}, f(x))^2.$$

Etant donné $x \in X$, on va donc comparer $d(f_x, \text{bar}(f_x))^2$ à $2ED(f, x)$. Notons b_x (resp. o_x) l'application constante qui envoie $\text{lien}(x)$ sur $\text{bar}(f_x)$ (resp. sur le sommet du cône $T_{f(x)}Y$). Par définition du laplacien, $d(b_x, o_x)^2 = \sum_{x' \in \text{lien}(x)} m(x, x') - \Delta f(x)|^2 = m(x) - \Delta f(x)|^2$. Comme π est radialement isométrique, $d(f_x, o_x)^2 = d(f|_{\text{lien}(x)}, f(x))^2 = 2ED(f, x)$. Alors

$$\begin{aligned} |d(f_x, \text{bar}(f_x))^2 - 2ED(f, x)| &= |d(f_x, b_x)^2 - d(f_x, o_x)^2| \\ &= |d(f_x, b_x) + d(f_x, o_x)| |d(f_x, b_x) - d(f_x, o_x)| \\ &\leq 2d(f_x, o_x)d(b_x, o_x) \\ &= 2\sqrt{2ED(f, x)}\sqrt{m(x)}|\Delta f(x)|, \end{aligned}$$

par la propriété de minimum du barycentre et l'inégalité triangulaire. Il vient

$$\begin{aligned} \left| \sum_z d(f_x, \text{bar}(f_x))^2 - 2E(f) \right| &\leq \sum_z |d(f_x, \text{bar}(f_x))^2 - 2ED(f, x)| \\ &\leq \sum_z 2\sqrt{2ED(f, x)}\sqrt{m(x)}|\Delta f(x)| \\ &\leq 2\left(\sum_z 2ED(f, x)\right)^{1/2} \left(\sum_z m(x) - \Delta f(x)|^2\right)^{1/2} \\ &= 2\sqrt{2E(f)}|\Delta f|, \end{aligned}$$

d'où

$$\sum_z d(f_x, \text{bar}(f_x))^2 \geq 2E(f) - 2\sqrt{2E(f)}|\Delta f|.$$

On revient à l'inégalité 1. Elle donne

$$E(f) \geq \lambda(2E(f) - 2\sqrt{2E(f)}|\Delta f|),$$

d'où

$$(2\lambda - 1)E(f) - 2\lambda\sqrt{2E(f)}|\Delta f| \leq 0,$$

soit, si $2\lambda - 1 \geq 0$,

$$(2\lambda - 1)^2 E(f) \leq 8\lambda^2 |\Delta f|^2. \blacksquare$$

3.8 Un théorème de point fixe en dimension infinie

Corollaire 36 (Iseki-Nayatani [IN]). *Soit Z un complexe simplicial fini de groupe fondamental Γ . Soit X son revêtement universel. Soit Y un espace métrique géodésique, $CAT(0)$ et complet. On suppose que pour tout $z \in Z$ et tout $y \in Y$, $\lambda(\text{lien}(z), T_y Y) > 1/2$. Alors toute action isométrique de Γ sur Y possède un point fixe.*

Preuve. On tire parti de l'inégalité de Garland pour déformer directement une application équivariante f_0 quelconque en une application constante. Iseki et Nayatani invoquent un résultat de U. Mayer, [May]. Mayer construit un flot de gradient pour toute fonction convexe continue sur un espace $CAT(0)$ complet. Cela s'applique à l'énergie sur l'espace des applications équivariantes (remarque 14). On dispose donc, pour toute application initiale f_0 , d'une ligne de gradient $t \mapsto f_t$, solution en un sens faible de l'équation différentielle

$$\frac{df_t}{dt} = -grad_{f_t} E = 2(-\Delta f_t).$$

Alors

$$\frac{d}{dt} E(f_t) = -|grad_{f_t} E|^2 = -4|\Delta f_t|^2.$$

Sous l'hypothèse $\lambda(\text{lien}(z), T_y Y) \geq \lambda > 1/2$, l'inégalité de Garland, proposition 35, entraîne l'inéquation différentielle

$$\frac{d}{dt} E(f_t) \leq -\frac{(2\lambda - 1)^2}{2\lambda^2} E(f_t).$$

L'énergie décroît donc exponentiellement.

Comme

$$\left| \frac{df_t}{dt} \right|^2 = -|grad_{f_t} E|^2 = -\frac{d}{dt} E(f_t),$$

l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \left| \frac{df_t}{dt} \right|^2 E(f_t)^{-1/2} dt = 2E(f_0)^{1/2}$$

est finie, d'où

$$\int_0^{+\infty} \left| \frac{df_t}{dt} \right| dt \leq \left(\int_0^{+\infty} \left| \frac{df_t}{dt} \right|^2 E(f_t)^{-1/2} dt \right)^{1/2} \left(\int_0^{+\infty} E(f_t)^{1/2} dt \right)^{1/2} < \infty.$$

Autrement dit, la courbe $t \mapsto f_t$ est de longueur finie.

On conclut que f_t converge vers une application constante. ■

3.9 Bas du spectre, version Gromov

Dans [Gr3], M. Gromov donne un résultat très voisin, nécessitant une hypothèse un peu plus forte. Commençons par une variante de la définition 21. La terminologie est empruntée à [Pi].

Définition 37 Soit (C, m) un graphe pondéré. Soit Y un espace métrique. Soit $g : C \rightarrow Y$. Le quotient de Rayleigh, version Gromov est $RQ^{Gro}(g) = E(g)/F(g)$, où

$$F(g) = \frac{1}{2m(\emptyset)} \sum_{c, c'} m(c)m(c') d(g(c), g(c'))^2.$$

Le bas du spectre, version Gromov $\lambda^{Gro}(C, m, Y)$ est la borne inférieure des $RQ^{Gro}(g)$, sur toutes les applications non constantes $g : C \rightarrow Y$.

Lorsque l'espace d'arrivée est euclidien, $F(g) = d(g, bar(g))^2$, donc $\lambda^{Gro}(C, m, \mathbf{R}) = \lambda(C, m, \mathbf{R})$. Comme pour le bas du spectre de Wang,

$$\lambda^{Gro}(C, m, Y_1 \times Y_2) = \min\{\lambda^{Gro}(C, m, Y_1), \lambda^{Gro}(C, m, Y_2)\}.$$

Lemme 38 Soit Y un espace $CAT(0)$. Pour tout graphe pondéré (C, m) ,

$$\lambda^{Gro}(C, m, Y) \leq \lambda(C, m, Y).$$

Preuve. Soit $c \in C$. Le lemme 16 appliqué à $y = g(c)$ donne

$$\sum_{c'} m(c') d(g(c), g(c'))^2 \geq \sum_{c'} m(c') d(g(c'), bar(g))^2 + m(\emptyset) d(g(c), bar(g))^2.$$

En sommant sur c , il vient

$$\begin{aligned} m(\emptyset) F(G) &\geq \sum_c m(c) d(g, bar(g))^2 + m(\emptyset) \sum_c m(c) d(g(c), bar(g))^2 \\ &= 2m(\emptyset) d(g, bar(g))^2. \end{aligned}$$

On conclut que $\lambda^{Gro} \leq \lambda$. ■

Gromov prouve le théorème 36 sous l'hypothèse $\lambda^{Gro}(liens, cones) > 1/2$. Au lieu d'utiliser le flot du gradient de l'énergie, il en construit une approximation à temps discret, qui diminue strictement l'énergie. Pour des exposés de l'argument de Gromov, voir [Pi] ou [NS].

4 Calculs de bas de spectre

Dans cette section, on donne des exemples de bas de spectre pour des graphes munis du poids naturel : toutes les arêtes ont un poids égal à 1, et les sommets un poids égal à leur valence.

4.1 Bas du spectre scalaire des immeubles

Exemple 39 Si C_k est un cycle de longueur k ,

$$\lambda(C_k, \mathbf{R}) = \frac{1}{2} |1 - e^{2i\pi/k}|^2.$$

En effet, on utilise la transformation de Fourier discrète pour diagonaliser la forme quadratique énergie. Les valeurs propres sont les $\frac{1}{2} |1 - \zeta|^2$ où ζ parcourt les racines k -èmes de l'unité, et $\zeta = 1$ correspond aux fonctions constantes.

On ne trouve $\lambda(C_k, \mathbf{R}) > 1/2$ que si $k \leq 5$. Un complexe simplicial dont les liens sont des cycles de longueur ≤ 5 est une surface à courbure positive, dont le groupe fondamental est fini. La propriété de point fixe pour tout espace $CAT(0)$ est immédiate, le théorème 36 n'apporte pas grand chose. On trouve que $\lambda(C_6, \mathbf{R}) = 1/2$, c'est le cas limite pour l'application du théorème 36. On essaiera d'en tirer parti au paragraphe 4.5.

Définition 40 *On appelle triangle généralisé un graphe ayant la propriété suivante : tout cycle est de longueur au moins 6, et deux arêtes quelconques sont contenues dans un cycle de longueur 6.*

Exemple 41 *Soit \mathbf{F} un corps fini à q éléments. Considérons le graphe biparti dont l'ensemble des sommets est la réunion de l'ensemble des points et de l'ensemble des droites du plan projectif $\mathbf{F}P^2$. On met une arête entre un point p et une droite d si $p \in d$. Il s'agit d'un triangle généralisé de valence $q + 1$.*

En effet, un cycle correspond à un polygone, qui a au moins 3 côtés, donc le cycle est de longueur au moins 6. Deux paires ($p \in d$) et ($p' \in d'$) sont toujours contenues dans un triangle.

Proposition 42 (W. Feit, G. Higman [FH]). *Si C est un triangle généralisé de valence q , alors*

$$\lambda(C, \mathbf{R}) = 1 - \frac{\sqrt{q-2}}{q-1}.$$

Les *immeubles de type \tilde{A}_2* sont les complexes simpliciaux dont les liens sont des triangles généralisés. Le théorème 36 et la propriété 31 entraînent que les groupes discrets cocompacts d'automorphismes des immeubles de type \tilde{A}_2 ont la propriété de point fixe sur les espaces de Hilbert, i.e. la propriété (T), [P1], [P2], [Z1].

4.2 Bas du spectre scalaire d'un graphe générique

“La plupart des graphes ont un bas du spectre proche de 1, lorsque le nombre de sommets est grand par rapport à la valence”. Comment préciser cet énoncé ?

Tout graphe à n sommets de valence $2d$ peut-être obtenu de la façon suivante : étant donné un ensemble S à n éléments, on se donne d permutations $\sigma_1, \dots, \sigma_d$ de S , on construit un graphe $\gamma(\sigma_1, \dots, \sigma_d)$ de valence $2d$ dont l'ensemble des sommets est S en reliant chaque sommet $s \in S$ aux sommets $\sigma_1(s), \dots, \sigma_d(s)$. Noter qu'on accepte les arêtes multiples (cas où $\sigma_i(s) = \sigma_j(s)$ ou $\sigma_j^{-1}(s)$) et les boucles reliant un sommet à lui-même (cas où $\sigma_i(s) = s$).

On utilise la mesure de probabilité uniforme sur les d -uplets de permutations (le produit de d copies du groupe symétrique \mathcal{S}_n), et la mesure image par l'application γ sur les graphes. On obtient ainsi une loi de probabilité sur l'ensemble $L(n, d)$ des graphes à n sommets de valence $2d$. On choisit le poids m uniforme qui vaut 1 sur chaque arête et donc $2d$ en chaque sommet.

Théorème 5 (A. Broder, E. Shamir, [BS]). *Lorsque n tend vers l'infini, la proportion de graphes dans $L(n, d)$ dont le bas du spectre est proche de 1 tend vers 1. Plus précisément (J. Friedman, [Fr]), il existe une constante c indépendante de k telle que la proportion de graphes C dans $L(n, d)$ dont le bas du spectre satisfait*

$$\lambda(C, \mathbf{R}) \geq 1 - \left(\frac{\sqrt{2d-1}}{d} + \frac{\log(2d)}{2d} + \frac{c}{d} \right)$$

tend vers 1 quand n tend vers l'infini.

Preuve. On donne seulement les grandes lignes de la preuve du résultat de Broder et Shamir.

1. Concentration. La fonction $\lambda : (\mathcal{S}_n)^d \rightarrow \mathbf{R}$ qui à un d -uplet de permutations $\sigma_1, \dots, \sigma_d$, associe le bas du spectre du graphe $\gamma(\sigma_1, \dots, \sigma_d)$, est lipschitzienne au sens suivant. Si deux d -uplets σ et σ' ne diffèrent que par une des permutations, alors

$$|\lambda(\sigma) - \lambda(\sigma')| \leq \frac{4}{d}.$$

En effet, soit $g : S \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction telle que $\text{bar}(g) = 0$. Le dénominateur $d(g, \text{bar}(g))^2 = 2d \sum_s |g(s) - \text{bar}(g)|^2$ du quotient de Rayleigh ne dépend pas des arêtes. Quant au numérateur, il vaut

$$\begin{aligned} E(g) &= \frac{1}{2} \sum_{s \in S} \sum_{i=1}^d (|g(s) - g(\sigma_i(s))|^2 + |g(s) - g(\sigma_i^{-1}(s))|^2) \\ &= \sum_{s \in S} \sum_{i=1}^d |g(s) - g(\sigma_i(s))|^2. \end{aligned}$$

Si deux d -uplets σ et σ' ne diffèrent que par la j -ème permutation, alors

$$\begin{aligned} |E_\sigma(g) - E_{\sigma'}(g)| &\leq \frac{1}{2} \sum_{s \in S} (|g(s) - g(\sigma_j(s))|^2 - |g(s) - g(\sigma_j'^{-1}(s))|^2) \\ &\leq \sum_{s \in S} 2(|g(s)|^2 + |g(\sigma_j(s))|^2 + |g(s)|^2 + |g(\sigma_j'(s))|^2) \\ &\leq 8 \sum_{s \in S} |g(s)|^2 \\ &= \frac{4}{d} d(g, \text{bar}(g))^2. \end{aligned}$$

En prenant la borne inférieure sur toutes les fonctions g de moyenne nulle, on obtient l'inégalité annoncée, laquelle énonce que la fonction λ est 1-lipschitzienne pour la distance sur $(\mathcal{S}_n)^d$ produit (au sens ℓ^1) de la distance sur \mathcal{S}_n qui met deux permutations quelconques à distance $4/d$ l'une de l'autre.

D'un résultat de concentration (voir [Le], Corollary 1.17), il résulte que, hors d'un sous-ensemble de $(\mathcal{S}_n)^d$ de mesure exponentiellement petite, la fonction λ est très proche de son espérance. Précisément, pour tout $r > 0$,

$$P(\lambda < \mathbf{E}(\lambda) - r) < e^{-r^2/2D^2},$$

où D^2 est la somme des carrés des diamètres de chaque copie de $(\mathcal{S}_n)^d$, soit $d \times (4/d)^2 = 16/d$. En prenant r de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{d}}$, on voit qu'il suffit de minorer l'espérance de la variable λ .

2. Lien entre bas du spectre et probabilité de retour. On considère la marche aléatoire simple sur le graphe $\gamma(\sigma)$. La matrice P des probabilités de transition est $P(s, s') = \frac{1}{k}$ s'il existe i tel que $s' = \sigma_i(s)$ ou $s' = \sigma_i^{-1}(s)$, $P(s, s') = 0$ sinon. La probabilité qu'une marche aléatoire issue de s revienne en s au bout de $2k$ pas est le coefficient de matrice $P^{2k}(s, s)$. La probabilité qu'une marche aléatoire partie d'un point quelconque y revienne au bout de $2k$ pas est égale à la trace $\text{tr}(P^{2k})$. Notons $1 = \mu_1 \geq \dots \geq \mu_n$ les valeurs propres de P . Alors le bas du spectre $\lambda = 1 - \mu_2$, d'où

$$\text{tr}(P^{2k}) = 1 + \mu_2^{2k} + \dots + \mu_n^{2k} \geq 1 + \mu_2^{2k} = 1 + (1 - \lambda)^{2k}.$$

On voit λ comme une variable aléatoire sur $(\mathcal{S}_n)^d$. Il vient

$$1 - \mathbf{E}(\lambda) = \mathbf{E}(1 - \lambda) \leq \mathbf{E}((1 - \lambda)^{2k})^{1/2k} \leq (\text{tr}(P^{2k}) - 1)^{1/2k}.$$

3. Estimation de l'espérance de la probabilité de retour. Faire un pas au hasard à partir de s consiste à tirer au hasard l'un des points $\sigma_i^\pm(s)$. Marcher au hasard pendant le temps $2k$ à partir de s consiste à choisir indépendamment $2k$ indices dans $\{1, \dots, d\} \times \pm 1$. Un tel choix peut-être vu comme une marche dans le monoïde libre \mathcal{M} engendré par $2d$ symboles $\{\pi_1, \pi_1^{-1}, \dots, \pi_d, \pi_d^{-1}\}$. Marchons maintenant au hasard dans un graphe tiré au hasard. On intervertit les tirages aléatoires. On tire d'abord le mot π de longueur $2k$ dans \mathcal{M} , puis le d -uplet σ dans $(\mathcal{S}_n)^d$. Fixons un sommet s_0 . Alors $\frac{1}{n}(n!)^d(2d)^{2k}\mathbf{E}(\text{tr}(P^{2k}))$ est égal au nombre de tirages π et σ donnant une marche qui part et se termine en s_0 .

Si le mot π n'est pas réduit dans le groupe libre de générateurs $\{\pi_1, \dots, \pi_d\}$, la marche fait des aller-retour sans intérêt. On majore aisément le nombre de mots non réduits. La contribution principale vient des mots triviaux dans le groupe libre. Leur probabilité est contrôlée par le bas du spectre d'un arbre régulier de valence $2d$, elle est inférieure à $(2/d)^k$.

Désormais, on suppose le mot π réduit. La contribution principale va venir des marches qui ne passent jamais deux fois par le même sommet jusqu'au temps $2k - 1$. En effet, lorsque, à π fixé, on compte le nombre de d -uplets σ qui réalisent une trajectoire donnée, chaque sommet rencontré pour la première fois donne une seule contrainte sur une permutation σ_i , alors qu'un sommet déjà rencontré (auto-intersection) en impose deux. La probabilité qu'une marche se recoupe avant de revenir en s_0 est donc au moins n fois plus petite que la probabilité qu'une marche revienne en s_0 sans se recouper, laquelle est inférieure à $\frac{1}{n - k}$.

On obtient donc une majoration de la forme $\mathbf{E}(tr(P^{2k})) \leq n\left(\frac{2}{d}\right)^k + \frac{1}{n-k} + \text{reste}$. On choisit k de l'ordre de $\log_d(n)$ et on conclut que $\mathbf{E}(\lambda)$ se comporte asymptotiquement en d comme pour l'arbre régulier de valence $2d$, pour lequel $\lambda = 1 - \frac{2\sqrt{2d-1}}{2d}$. ■

Remarque 43 *Le modèle avec les permutations peut paraître artificiel. Il est simplement commode. Une modification légère permet d'étendre la conclusion du théorème 5 à la mesure uniforme sur l'ensemble $L(n, d)$. On peut même éliminer les graphes possédant des arêtes multiples ou des boucles, voir [BS].*

4.3 Bas du spectre à valeurs dans un arbre

On rappelle que, d'après la proposition 26, pour minorer $\lambda(C, m, Y)$ pour un espace $CAT(0)$ Y , il suffit de traiter ses cônes tangents. Plus précisément, il suffit de minorer $RQ(g)$ lorsque $g : C \rightarrow Y$ a son barycentre au sommet du cône.

Proposition 44 *Si Y est un arbre, alors pour tout graphe pondéré (C, m) ,*

$$\lambda(C, m, Y) = \lambda(C, m, \mathbf{R}).$$

Preuve. Un cône tangent à un arbre est ou bien une droite (dans ce cas, il n'y a rien à prouver), ou bien une gerbe de demi-droites D_1, \dots, D_n de même origine. Soit $g : C \rightarrow \bigcup_i D_i$ une application dont le barycentre est au sommet. Notons a_i la somme pondérée des distances au sommet des points de $g(C)$ se trouvant dans la demi-droite D_i . Comme $bar(g)$ est au sommet, pour tout $i = 1, \dots, n$,

$$a_i \leq \sum_{j \neq i} a_j.$$

En effet, lorsqu'on avance dans la branche D_i , la dérivée de la fonction $d(g, \cdot)^2$ à l'origine est $-a_i + \sum_{j \neq i} a_j \geq 0$. Par conséquent, il existe un polygone dans le plan euclidien dont les longueurs des côtés sont les a_i . Autrement dit, il existe des vecteurs unitaires e_1, \dots, e_n dans \mathbf{R}^2 tels que $\sum_{i=1}^n a_i e_i = 0$. On définit une application $g' : C \rightarrow \mathbf{R}^2$ en posant $g'(c) = d(g(c), bar(g))e_i$ lorsque $g(c) \in D_i$. Alors $bar(g') = 0$, $E(g') \leq E(g)$ et $d(g', bar(g'))^2 = d(g, bar(g))^2$, donc $RQ(g') \leq RQ(g)$. On conclut que $\lambda(C, m, Y) \geq \lambda(C, m, \mathbf{R}^2) = \lambda(C, m, \mathbf{R})$, puis, comme Y contient des copies isométriques de \mathbf{R} , que $\lambda(C, m, Y) = \lambda(C, m, \mathbf{R})$. ■

4.4 Ultralimites

Soit Y_j une suite d'espaces métriques. On se donne une suite de points $y_j \in Y_j$ et un ultrafiltre ω sur \mathbf{N} . On considère l'ensemble des suites $(x_j)_{j \in \mathbf{N}}$ de points $x_j \in Y_j$ telles que la distance $d(x_j, y_j)$ reste bornée. On le munit de la semi-distance $d((x_j), (x'_j)) = \lim_{\omega} d(x_j, x'_j)$. On quotiente par la relation $(x_j) \sim (x'_j)$ si $d((x_j), (x'_j)) = 0$. L'espace métrique obtenu est noté $\lim_{\omega}(Y_j)$. C'est une *ultralimite* de la suite Y_j .

Lemme 45 Soient Y_j des espaces $CAT(0)$. Soit Y une ultralimite des Y_j . Alors Y est $CAT(0)$ et pour tout graphe pondéré fini (C, m) ,

$$\lambda(C, Y) \geq \limsup_{j \rightarrow \infty} \lambda(C, Y_j).$$

Preuve. Soit ω un ultrafiltre tel que $(Y, y) = \lim_{\omega}(Y_j, y_j)$. Etant donnée $g : C \rightarrow Y$, choisissons pour chacun des points $g(c) \in Y$ une suite qui le représente. On la note $(g_j(c))_{j \in \mathbf{N}}$. Alors $\lim_{\omega} E(g_j) = E(g)$. La suite $(\text{bar}(g_j))$ restant à distance bornée de l'image de g_j , elle représente un point $z \in Y$, et $\lim_{\omega} d(g_j, \text{bar}(g_j))^2 = d(g, z)^2 \geq d(g, \text{bar}(g))^2$, donc

$$\lim_{\omega} RQ(g_j) \leq RQ(g).$$

On conclut que

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \lambda(C, Y_j) \leq \lambda(C, Y). \blacksquare$$

Exemple 46 Les cônes asymptotiques d'un espace métrique Y sont les ultralimites faibles des espaces homothétiques ϵY .

Ils sont définis comme suit. On se donne une suite de points $y_j \in Y$, une suite de nombres d_j tendant vers $+\infty$ et un ultrafiltre ω sur \mathbf{N} . On note alors $\text{cone}_{\omega}(Y) = \lim_{\omega}(d_j^{-1}Y_j, y_j)$.

Corollaire 47 (Gromov, [Gr3]). Soit M une variété riemannienne simplement connexe, à courbure sectionnelle négative ou nulle. Soit $\text{cone}_{\omega}(M)$ un cône asymptotique de M . Alors pour tout graphe pondéré fini (C, m) ,

$$\lambda(C, \text{cone}_{\omega}(M)) \geq \lambda(C, \mathbf{R}).$$

Exemple 48 Les cônes asymptotiques des espaces symétriques sont des immeubles euclidiens. Pour de tels immeubles I , on a donc, pour tout graphe pondéré fini (C, m) ,

$$\lambda(C, I) \geq \lambda(C, \mathbf{R}).$$

Remarque 49 L'inégalité 48 ne peut être vérifiée par tous les immeubles euclidiens.

En effet, soit I un immeuble euclidien localement fini de dimension $d \geq 2$. Soit $C = \text{lien}(x)$ le lien d'un sommet, muni de la pondération naturelle, qui donne le poids 1 aux simplexes de dimension d . Il est fréquent que $\lambda(C, \mathbf{R}) > 1/2$ (c'est le cas pour les immeubles de type \tilde{A}_2 , d'après la proposition 42; pour les autres immeubles, voir par exemple [Ga]). Il est aussi fréquent que I possède un groupe discret cocompact d'isométries. Si on avait $\lambda(C, I) \geq \lambda(C, \mathbf{R})$, on prouverait à l'aide du théorème 4 que toute application harmonique équivariante $I \rightarrow I$ est constante. Or l'identité $id : I \rightarrow I$ est harmonique non constante, contradiction.

4.5 Inégalités de Wirtinger

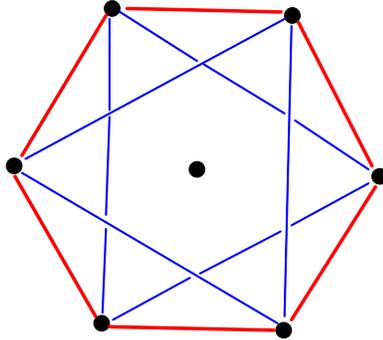
Définition 50 Soit C un graphe fini non pondéré, soit Y un espace métrique, soit $g : C \rightarrow Y$. Pour $j = 1, 2, \dots$, on note

$$E_j(g) = \frac{1}{2} \sum_{c \in C} \sum_{d(c,c')=j} d(g(c), g(c'))^2.$$

Autrement dit, pour $j = 1$, E_1 est l'énergie relative à la pondération uniforme (chaque arête a un poids égal à 1). Pour la même pondération, $F = \frac{1}{m(\emptyset)} \sum_{j \geq 1} E_j$, où $m(\emptyset)$ est égal à deux fois le nombre d'arêtes de C .

Exemple 51 Cas du k -cycle C_k .

Soit C_k le graphe formé d'un unique cycle de k arêtes, avec la pondération uniforme. Soit $g : C_k \rightarrow \mathbf{R}^2$ un plongement de C_k comme un polygone régulier à k côtés dans le plan euclidien, inscrit dans un cercle de rayon 1. On note $W(k, 1) = E(g) = 4k \sin^2(\pi/k)$ son énergie. Alors $E_j(g) =: W(k, j) = 4k \sin^2(\pi j/k)$.



En rouge, le graphe C_6 . En bleu, les couples de points entrant dans la définition de E_2 .

Définition 52 Suivant Gromov [Gr2], on dit qu'un espace métrique Y satisfait à l'inégalité de Wirtinger Wir_k si, pour toute application $g : C_k \rightarrow Y$, et pour tout $j = 1, \dots, k$,

$$\frac{E(g)}{E_j(g)} \geq \frac{W(k, 1)}{W(k, j)}.$$

Proposition 53 Les espaces euclidiens satisfont à toutes les inégalités de Wirtinger Wir_k , $k \geq 4$.

Preuve. Soit $g : C_k \rightarrow \mathbf{R}^n$. On identifie C_k à l'ensemble des racines k -èmes de l'unité dans \mathbf{C} , et on note $\zeta = e^{2i\pi/k}$. On décompose g en série de Fourier

discrète $g = \sum_{\ell=1}^k g_\ell$, où $g_\ell(\zeta c) = \zeta^\ell g_\ell(c)$. D'après l'identité de Bessel-Parseval, cette décomposition est orthogonale pour la norme ℓ^2 ,

$$\sum_c |g(c)|^2 = \sum_\ell \sum_c |g_\ell(c)|^2.$$

Comme

$$\begin{aligned} E_j(g) &= \sum_c |g(\zeta^j c) - g(c)|^2 \\ &= \sum_c \left| \sum_\ell (g_\ell(\zeta^j c) - g_\ell(c)) \right|^2 \\ &= \sum_c \left| \sum_\ell (\zeta^{j\ell} - 1) g_\ell(c) \right|^2 \\ &= \sum_\ell |\zeta^{j\ell} - 1|^2 \sum_c |g_\ell(c)|^2, \end{aligned}$$

la forme hermitienne E_j est diagonale. Par conséquent, la borne inférieure des nombres $E_1(g)/E_j(g)$ est égale au plus petit des quotients $\frac{|\zeta^\ell - 1|^2}{|\zeta^{j\ell} - 1|^2}$, $\ell = 0, \dots, k-1$. On vérifie aisément que le quotient est minimum exactement lorsque $\ell = 1$ ou $\ell = k-1$. La fonction $g : C_k \rightarrow \mathbf{R}^2$ définie par $g(c) = (\Re(c), \Im(c))$ réalise ce minimum, donc celui-ci est égal à $\frac{W(k,1)}{W(k,j)}$.

Pour un usage ultérieur, remarquons que, pour une application $g : C_k \rightarrow \mathbf{R}^n$, $E_1(g)/E_j(G) = \frac{W(k,1)}{W(k,j)}$ si et seulement si il existe des vecteurs $u \in \mathbf{R}^n$ et $v \in \mathbf{C}^n$ tels que $g(c) = u + cv + \bar{c}v$, i.e. si g est la restriction aux racines de l'unité d'une application \mathbf{R} -affine de \mathbf{C} dans \mathbf{R}^n . ■

Théorème 6 (M. Gromov, [Gr2] section 25). *Tout espace CAT(0) satisfait aux inégalités de Wirtinger Wir_k pour tout $k \geq 4$.*

Preuve. Etant donnée $g : C_k \rightarrow Y$, on équipe chaque arête cc' de C_k de la métrique qui lui donne la longueur $d(g(c), g(c'))$, de sorte que C_k devient un cercle ∂D . On prolonge g en une application isométrique $f : \partial D \rightarrow Y$. Puis on prolonge f au disque D de sorte que la métrique induite sur D soit à courbure négative ou nulle. Dans le cas où Y est un polyèdre (le seul que nous traiterons ici), il suffit de prendre pour f une surface réglée, par exemple un cône sur $f|_{\partial D}$, la métrique induite est alors riemannienne plate avec un nombre fini de singularités côniques.

Suivant A. Weil [W1], on change la métrique induite ds^2 en une métrique riemannienne plate $ds_0^2 \leq ds^2$ qui coïncide avec ds^2 le long du bord. En effet, par représentation conforme, quitte à composer f avec un homéomorphisme quasiconforme du disque, $ds^2 = e^{-2\phi}(du^2 + dv^2)$. La courbure $K = e^{2\phi}\Delta\phi$ étant négative ou nulle, la fonction harmonique ϕ_0 qui vaut ϕ au bord satisfait $\phi \geq \phi_0$ à l'intérieur, et $ds_0^2 = e^{-2\phi_0}(du^2 + dv^2)$ est plate.

Suivant Yu. Reshetnyak, [R1], [R2], il existe un convexe $D' \subset \mathbf{R}^2$ et un homéomorphisme $(D, ds_0^2) \rightarrow D'$ qui augmente (au sens large) les distances, et préserve la longueur du bord.

La restriction de cet homéomorphisme à C_k , est une application $g' : C_k \rightarrow \mathbf{R}^2$ telle que, pour toute arête cc' de C_k , $d(g'(c), g'(c')) = d(g(c), g(c'))$, et pour toute paire de sommets c, c' , $d(g'(c), g'(c')) \geq d(g(c), g(c'))$. Par conséquent, $E_1(g') = E_1(g)$, et pour $j \geq 1$, $E_j(g') \geq E_j(g)$, donc

$$\frac{E_1(g)}{E_j(g)} \geq \frac{E_1(g')}{E_j(g')} \geq \frac{W(k, 1)}{W(k, j)},$$

d'après la proposition 53. ■

Lemme 54 *Si Y satisfait à l'inégalité de Wirtinger Wir_k , alors le bas du spectre du cycle C_k à valeurs dans Y est au moins égal au bas du spectre à valeurs dans \mathbf{R} ,*

$$\lambda^{Gro}(C_k, Y) \geq \lambda^{Gro}(C_k, \mathbf{R}).$$

Preuve. Si $g : C_k \rightarrow Y$,

$$\begin{aligned} RQ^{Gro}(g)^{-1} &= \frac{F(g)}{E(g)} \\ &= \frac{1}{E(g)} \frac{1}{2k} \sum_{j \geq 1} E_j(g) \\ &\leq \frac{1}{E(g)} \frac{1}{2k} \sum_{j \geq 1} \frac{W(k, j)}{W(k, 1)} E_1(g) \\ &= RG^{Gro}(g')^{-1}, \end{aligned}$$

où g' est un polygone régulier dans le plan euclidien.

S'il existe une application $g : C_k \rightarrow Y$ dont le quotient de Rayleigh est égal à $\lambda^{Gro}(C_k, \mathbf{R})$, alors on a $\frac{E_j(g)}{E_1(g)} = \frac{W(k, j)}{W(k, 1)}$ pour tout $j = 1, \dots, \lfloor k/2 \rfloor$. ■

Proposition 55 *Soit C un graphe de diamètre k muni de la pondération uniforme. Soit \mathcal{C} une famille non vide de k -cycles plongés isométriquement dans C . On suppose que, étant donnés deux sommets c et c' de C le nombre $N_{\mathcal{C}}(c, c')$ de cycles de la famille \mathcal{C} qui passent par c et c' ne dépend que de la distance $j = d(c, c')$, $N_{\mathcal{C}}(c, c') = N_{d(c, c')} = N_j$.*

Soit Y un espace métrique qui satisfait à l'inégalité de Wirtinger Wir_k . Alors le bas du spectre (au sens de Gromov) de C à valeurs dans Y est minoré par une constante

$$\lambda^{Gro}(C, Y) \geq \lambda(k),$$

optimale au sens suivant. Si C admet un plongement isométrique dans un espace Y_0 tel que chaque cycle de \mathcal{C} soit envoyé sur un polygone régulier contenu dans un plan euclidien plongé isométriquement dans Y_0 , alors $\lambda(k)$ est égale au quotient de Rayleigh (selon Wang ou Gromov) de ce plongement.

Preuve. Soit \mathcal{PC} l'ensemble des paramétrisations de cycles de \mathcal{C} , i.e. des isométries $h : C_k \rightarrow C$ dont l'image appartient à \mathcal{C} . Si c et $c' \in C$ sont à distance $j \geq 1$, le nombre de triplets $(h, z, z') \in \mathcal{PC} \times C_k \times C_k$ tels que $h(z) = c$ et $h(z') = c'$ est égal à N_j si $j \neq k/2$, et à $2N(k/2)$ sinon. En effet, pour tout couple z et z' à distance $j < k/2$, et pour tout cycle de \mathcal{C} passant par c et c' , il existe une unique paramétrisation qui envoie z sur c et z' sur c' , et il en existe deux si $d(z, z') = k/2$. On notera donc

$$\tilde{N}_j = \begin{cases} N_j & \text{si } j < k/2, \\ 2N(k/2) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $g : C \rightarrow Y$ et $j \in \{1, \dots, \lfloor k/2 \rfloor\}$,

$$\begin{aligned} \sum_{h \in \mathcal{PC}} E_j(g \circ h) &= \frac{1}{2} \sum_{h \in \mathcal{PC}} \sum_{z \in C_k} \sum_{\{z' \in C_k \mid d(z, z') = j\}} d(g \circ h(z), g \circ h(z'))^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{c \in C} \sum_{\{c' \in C \mid d(c, c') = j\}} \sum_{\{(h, z, z') \mid h(z) = c, h(z') = c'\}} d(g(c), g(c'))^2 \\ &= \tilde{N}_j E_j(g). \end{aligned}$$

Comme Y satisfait Wir_k , pour tout h , $E_j(g \circ h) \leq \frac{W(k, j)}{W(k, 1)} E_1(g \circ h)$, donc

$$E_j \leq \frac{W(k, j)}{\tilde{N}_j W(k, 1)} E_1(g),$$

$$F(g) \leq E(g) \sum_{j=1}^{\lfloor k/2 \rfloor} \frac{W(k, j)}{\tilde{N}_j W(k, 1)},$$

soit $RQ^{Gro}(g) \geq \lambda(k)$, où $\lambda(k)$ est l'inverse de $\sum_{j=1}^{\lfloor k/2 \rfloor} \frac{W(k, j)}{\tilde{N}_j W(k, 1)}$.

Supposons qu'il existe un espace $CAT(0)$ Y_0 et un point $y_0 \in Y_0$ tels que, pour chaque cycle κ de \mathcal{C} , $g|_\kappa$ factorise par le plongement de κ comme polygone régulier d'un plan euclidien, puis par un plongement isométrique de ce plan dans Y_0 qui envoie le centre du polygone sur y_0 . Alors l'inégalité Wir_k est une égalité pour chaque k -cycle, donc $RQ^{Gro}(g) = \lambda(k)$.

Montrons que dans ce cas, $RQ(g) = RQ^{Gro}(g)$. Pour chaque cycle κ de \mathcal{C} , notons ν_κ l'image par g de la mesure de probabilité uniforme sur les sommets de κ et μ la somme des mesures ν_κ , normalisée pour devenir une mesure de probabilité. Toutes ces mesures ont le même barycentre y_0 . On applique le lemme 16 à chaque mesure ν_κ : c'est une égalité à chaque fois. Par conséquent, le lemme 16 est une égalité pour la mesure μ , laquelle n'est autre que l'image par g de la mesure de probabilité uniforme $m/m(\emptyset)$ sur les sommets de C . On conclut que pour tout sommet c de C ,

$$\sum_{c'} m(c') d(g(c), g(c'))^2 = \sum_{c'} m(c') d(g(c'), y_0)^2 + m(\emptyset) d(g(c), y_0)^2,$$

puis, en sommant sur c , que

$$m(\emptyset)F(g) = 2m(\emptyset)d(g, y_0)^2,$$

donc l'inégalité du lemme 38 est une égalité, $RQ(g) = RQ^{Gro}(g) = \lambda(k)$. ■

Exemple 56 *Cas des immeubles euclidiens.*

Soit I un immeuble euclidien localement fini de dimension 2. Soit L le lien d'un sommet dans I . Alors L est un immeuble sphérique de rang 1. Soit \mathcal{C} l'ensemble de ses appartements. Chaque appartement est un k -cycle, avec $k = 4, 6, 8$ ou 12 , il est plongé isométriquement. Le nombre d'appartements contenant deux points ne dépend que de leur distance. La proposition 55 s'applique, le cas d'égalité est réalisé par le plongement naturel du lien $\iota : L \subset I$.

Corollaire 57 *Soit I un immeuble euclidien localement fini de dimension 2, soit L le lien d'un sommet de I , muni de la pondération uniforme. Soit Y un espace métrique qui satisfait à l'inégalité Wir_k , où k est le nombre de sommets des appartements de L . Alors*

$$\lambda(L, Y) \geq \lambda^{Gro}(L, Y) \geq RQ^{Gro}(\iota : L \rightarrow I) = RQ(\iota : L \rightarrow I) = \frac{1}{2}|1 - e^{2i\pi/k}|^2,$$

avec égalités pour $Y = I$.

Preuve. Pour le plongement $\iota : L \subset I$, chaque sommet de L est à distance 1 du barycentre, deux sommets voisins dans L se trouvent à distance $|1 - e^{2i\pi/k}|$ dans I , donc $RQ(\iota) = \frac{1}{2}|1 - e^{2i\pi/k}|^2$. ■

Exemple 58 *Dans le cas des immeubles de type \tilde{A}_2 , on trouve que, pour tout espace métrique $CAT(0)$ Y , $\lambda(L, Y) \geq \lambda^{Gro}(L, Y) \geq \frac{1}{2}$, avec égalité lorsque $Y = I$.*

4.6 Spéculation

Soit I un immeuble de type \tilde{A}_2 , Γ un groupe discret cocompact d'automorphismes de I , Y un espace métrique $CAT(0)$, $f : I \rightarrow Y$ une application harmonique équivariante. Si f n'est pas constante, alors en chaque sommet x de I , $RQ(f|_{lien(x)}) = \frac{1}{2}$. En analysant le cas d'égalité dans chacune des inégalités 53 à 55, on devrait pouvoir en déduire que f est une homothétie sur un sous-ensemble convexe de Y . En analysant le cas de presque égalité (quelles sont les conséquences du fait que $RQ(g)$ est proche de $\frac{1}{2}$ pour une application $g : lien(x) \rightarrow Y$), on devrait pouvoir montrer que le flot de Mayer converge ou bien vers une constante, ou bien vers une homothétie. Lorsque I est un immeuble exotique (isométrique à aucun immeuble associé à un groupe réductif sur un corps local non archimédien, de tels immeubles existent et ont parfois des groupes discrets cocompacts d'automorphismes, voir [CMSZ], [Bar]), on devrait pouvoir conclure que Γ n'est pas linéaire.

L'argument de la proposition 55 est suggéré par l'observation suivante, développée dans [P2] : la formule de Garland, dans le cas des immeubles de dimension 2, s'obtient en moyennant sur les appartements une formule naïve. Le fait que les appartements soient plats semble essentiel.

La formule de Garland énoncée plus haut pour les complexes simpliciaux, est purement combinatoire. Elle ne tient pas compte de la géométrie des triangles. C'est pourquoi elle ne donne aucun résultat utilisable pour les immeubles de type \tilde{B}_2 (resp. \tilde{G}_2), dont les appartements sont plats à condition de décider que chaque simplexe est isométrique à un triangle rectangle isocèle (resp. demi-triangle équilatéral), dont certains liens ont pour appartements des cycles de longueur 8 (resp. 12). Il faudrait adapter la formule à la géométrie, de sorte qu'elle devienne critique pour des triangles dont un angle vaut $2\pi/k$, pour k quelconque. En dehors des immeubles sphériques de dimension 1 (appelés aussi n -gones généralisés), il y a peut-être d'autres graphes qui sont, au moins approximativement, bien balayés par des cycles. Les graphes aléatoires semblent de bons candidats.

5 Groupes aléatoires

On donne les définitions permettant de comprendre l'énoncé de la question 2 et deux résultats partiels.

5.1 Modèles de groupes aléatoires à densité

D'après Gromov [Gr1], un modèle de groupes aléatoires consiste à se donner une famille de lois de probabilité sur l'ensemble des présentations de groupes. Une présentation de groupe, c'est un ensemble de générateurs S et un ensemble de relateurs R , i.e. un sous-ensemble du groupe libre F_S . Dans ce texte, on va décrire des modèles portant sur des présentations finies. Pour simplifier, on se limite à des lois uniformes sur des ensembles finis. Il y a alors trois paramètres en jeu : le nombre m d'éléments de S , la longueur (ou bien longueur maximale) ℓ des éléments de R et le nombre N de relateurs. Un trop grand nombre de relateurs risque de rendre le groupe quotient $G = \langle S | R \rangle$ trivial. Gromov a découvert que même en prenant pour N une puissance du nombre de choix possibles, le groupe obtenu est souvent non trivial. Cela l'a conduit à choisir N de la forme

$$N = \frac{2m}{2m-1} (2m-1)^{d\ell},$$

où $0 < d < 1$. On parle alors de modèle à densité d .

Si on fixe m et on fait tendre ℓ vers l'infini, on obtient le modèle étudié par Gromov dans [Gr1]. Si on fixe $\ell = 3$ et on fait tendre m vers l'infini, on obtient un modèle étudié par A. Zuk dans [Z2]. On s'intéresse à des énoncés du type suivant. *On se place en densité d , i.e. on fixe $N \sim (2m-1)^{d\ell}$. La proportion des présentations possédant la propriété (P) tend vers 1 lorsque ℓ (resp. m) tend vers l'infini. Lorsqu'une telle assertion est vraie, on dit que la propriété (P) est génériquement vraie en densité d .*

Théorème 7 (Gromov, [Gr1], [O1]). *En densité $d > 1/2$, le groupe $G = \langle S | R \rangle$ est génériquement trivial. En densité $d < 1/2$, G est génériquement hyperbolique et infini.*

A une présentation finie d'un groupe est associé un polyèdre fini $\mathcal{P}_{S,R}$, le *polyèdre de Cayley*, défini comme suit. On forme un bouquet de cercles, un pour chaque générateur $s \in S$. Pour chaque relateur $r \in R$, on colle une 2-cellule sur le bouquet au moyen de l'application qui paramètre par le bord d'un disque le chemin décrit par le mot r . Par construction, le groupe fondamental du polyèdre de Cayley d'une présentation de G est G . Par conséquent, son revêtement universel comporte autant de sommets qu'il y a d'éléments de G . On peut construire directement le revêtement universel $\tilde{\mathcal{P}}_{S,R}$ comme suit. Il y a une arête numérotée s reliant deux éléments g et g' de G si $g' = gs$. Pour chaque relateur r et chaque élément $g \in G$, on colle une 2-cellule le long du chemin issu de g obtenu en suivant successivement les arêtes dont les numéros sont indiqués par le mot r .

Lorsque les relateurs sont de longueur 3, les 2-cellules sont des triangles. Toutefois, $\mathcal{P}_{S,R}$ n'est pas un complexe simplicial, puisqu'il n'a qu'un sommet. Son revêtement universel $\tilde{\mathcal{P}}_{S,R}$ non plus, car il arrive que deux arêtes aient les mêmes extrémités, ou que deux faces soient collées sur le même chemin. Néanmoins, on peut définir le lien d'un sommet dans $\tilde{\mathcal{P}}_{S,R}$. C'est un graphe $L(S, R)$ dont l'ensemble des sommets s'identifie à $S \cup S^{-1}$. Il y a une arête reliant z à z' chaque fois qu'il existe $z'' \in S \cup S^{-1}$ tel que $z^{-1}z'z''$ ou $z'^{-1}z''z$ ou $z''^{-1}zz'$ appartient à R .

Théorème 8 (Zuk, [Z2]). *On se place dans le modèle où les relateurs sont de longueur 3. Si $d < 1/3$, génériquement G possède un quotient libre à deux générateurs. Si $d > 1/3$, génériquement le graphe $L(S, R)$ a un bas du spectre proche de 1. En particulier, il satisfait*

$$\lambda(L(S, R), \mathbf{R}) > \frac{1}{2}.$$

Preuve. On introduit un modèle de graphes aléatoires, et on montre que génériquement en densité $> 1/3$, $L(S, R)$ a les mêmes propriétés spectrales qu'un graphe aléatoire. ■

Corollaire 59 *Dans le modèle où les relateurs sont de longueur 3, et en densité $1/3 < d < 1/2$, le groupe associé à une présentation générique est infini et possède la propriété (T) de Kazhdan. En revanche, en densité $< 1/3$, il ne possède pas la propriété (T).*

Preuve. Comme le polyèdre de Cayley n'est pas à proprement parler un complexe simplicial, le résultat ne découle pas littéralement des méthodes du paragraphe 3.1, mais l'esprit est le même. Voir [Z2] pour les détails. ■

5.2 Modèle de groupes aléatoires à graphes

Dans [Gr3], Gromov introduit un procédé de construction de groupes dont le graphe de Cayley est modelé sur un graphe donné. Il y a un choix supplémentaire, celui d'un étiquetage du groupe. Comme on peut faire ce choix au hasard, on obtient ainsi un nouveau modèle de groupe aléatoire. On suit l'exposé de cette construction donné dans [O3].

Il s'agit de coder des présentations de groupes à l'aide de graphes. Etant donné un ensemble fini de générateurs S , on note B le graphe (bouquet de cercles) ayant un seul sommet $*$ et autant d'arêtes qu'il y a d'éléments dans S . Soit $\gamma \rightarrow B$ un graphe *étiqueté*, i.e. un graphe γ muni d'une application simpliciale vers B . On note $\Gamma = \langle S | \gamma \rightarrow B \rangle$ le quotient du groupe libre $F_S = \pi_1(B, *)$ par le sous-groupe normal engendré par les images des cycles de γ dans B .

Le graphe de Cayley $Cay = Cay(\Gamma, S)$ du groupe Γ est lui-même étiqueté. Le graphe γ s'envoie naturellement, mais pas de façon tout à fait canonique, dans Cay . Il faut choisir un point base dans chaque composante connexe de γ . Alors tout chemin issu d'un des points base dans γ se relève *uniquement* en un chemin issu de l'élément neutre dans Cay , les cycles se relèvent en des cycles, cela définit une application $\phi : \gamma \rightarrow Cay$. Une application f de Cay vers un espace Y équivariante relativement à une action isométrique ρ de Γ sur Y , induit une application $f \circ \phi$ de γ vers Y , "équivariante" au sens suivant : étant donné un chemin P de x à x' dans γ , le long duquel on lit un mot $w(P)$, et donc un élément de Γ , $f \circ \phi(x') = \rho(w(P)) \circ f \circ \phi(x)$. On espère donc analyser les applications équivariantes via leurs petites soeurs, définies sur le graphe donné γ , en utilisant des propriétés de γ .

Pour que cela soit efficace, on aimerait que ϕ soit injective. Voici une condition suffisante, inspirée par la notion de petite simplification en théorie combinatoire des groupes.

Définition 60 *On appelle tour de taille (*girth*) d'un graphe la plus petite longueur d'un cycle.*

On appelle pièce dans le graphe étiqueté $\gamma \rightarrow B$ un mot dans l'alphabet $S \cup S^{-1}$ réalisé par au moins deux chemins distincts immergés dans γ .

Etant donné $\alpha > 0$, on dit que $\gamma \rightarrow B$ satisfait $Gr'(\alpha)$ si toute pièce P de γ a une longueur $|P| < \alpha \text{girth}(\gamma)$.

Théorème 9 (M. Gromov, voir [Gr3], [O2], [O3]). *Soit $\gamma \rightarrow B$ un graphe étiqueté. On suppose que γ*

1. *ne comporte pas de sommet valence 1 ;*
2. *est réduit, i.e. l'application $\gamma \rightarrow B$ est une immersion ;*
3. *satisfait $Gr'(\frac{1}{6})$.*

Alors le groupe $\Gamma = \langle S | \gamma \rightarrow B \rangle$ est hyperbolique au sens de Gromov, et les applications naturelles $\phi : \gamma \rightarrow Cay(\Gamma, S)$ sont injectives. De plus, $\text{girth}(Cay) \geq \text{girth}(\gamma)$.

Comment construire des graphes qui satisfassent $Gr(1/6)$? Il suffit de subdiviser les arêtes d'un graphe donné (remplacer chaque arête par j arêtes consécutives), et de choisir au hasard l'étiquetage du graphe obtenu. Lorsque j tend vers l'infini, la proportion d'étiquetages tels que le graphe subdivisé étiqueté obtenu après réduction satisfasse $Gr'(1/6)$ tend vers 1 (on peut contrôler cette proportion en fonction de la valence maximale des sommets de γ et du rapport $diam(\gamma)/girth(\gamma)$).

Ce sont ces groupes aléatoires auxquels Gromov fait allusion dans la question 2. Peut-on établir la propriété FSI pour de tels groupes ? Le cas des actions sur les espaces de Hilbert est réglé par la théorème suivant.

Théorème 10 (M. Gromov, voir [Gr3], [Si]). *Si, à valence fixée, le tour de taille de γ est suffisamment grand par rapport au bas de son spectre scalaire, alors, lorsque j tend vers l'infini, la proportion d'étiquetages du graphe obtenu en divisant en j les arêtes de γ tels que le groupe associé possède la propriété (T) de Kazhdan tend vers 1.*

La preuve repose sur une caractérisation de la propriété (T) en termes de marches aléatoires sur le graphe de Cayley. On utilise le fait que la marche aléatoire dans un graphe γ simule la marche aléatoire dans le graphe de Cayley du groupe associé. ■

Le cas des actions sur les variétés riemanniennes à courbure négative ou nulle s'en déduit, par un argument de passage à la limite. Il reste à traiter le cas des actions sur les immeubles, ce que l'auteur de ces lignes est incapable de faire pour l'instant.

Références

- [Bar] S. BARRE, *Immeubles de Tits triangulaires exotiques*. Ann. Fac. Sci. Toulouse, VI. Sér., Math. **9**, 575 – 603 (2000).
- [Bas] H. BASS, *Groups of integral representation type*. Pac. J. Math. **86**, 15 – 51 (1980).
- [Bo1] A. BOREL, *Introduction aux groupes arithmétiques*. Hermann, Paris (1969).
- [Bo2] A. BOREL, *Cohomologie de certains groupes discrets et laplacien p -adique (d'après H. Garland)*. Sémin. Bourbaki 1973/74, Exposé **437**, Lect. Notes Math. **431**, Springer, Berlin, 12 – 35 (1975).
- [BH] M. BRIDSON, A. HAEFLIGER, *Metric spaces of non-positive curvature*. Grundle. der Math. Wissensch. **319**. Springer, Berlin (1999).
- [BS] M. BRODER, E. SHAMIR, *On the second eigenvalue of random regular graphs*. In 28th Annual Symposium on Foundations of Computer Science, IEEE, 286 – 294 (1987)
- [BT] F. BRUHAT, J. TITS, *Groupes réductifs sur un corps local*. Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci. **41**, 5 – 251 (1972).
- [Ca] E. CARTAN, *Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann*. Bull. Soc. Math. de France **54**, 214 – 264 (1926) et **55**, 114 – 134 (1927).

- [CMSZ] D. CARTWRIGHT, A.-M. MANTERO, T. STEGER, A. ZAPPA, *Groups acting simply transitively on the vertices of a building of type \tilde{A}_2 . I*. *Geom. Dedicata* **47**, 143 – 166 (1993). *II : The cases $q = 2$ and $q = 3$* . *Geom. Dedicata* **47**, 167 – 223 (1993).
- [Co] K. CORLETTE, *Archimedean superrigidity and hyperbolic geometry*. *Ann. Math.* **135**, 165 – 182 (1992).
- [DV] P. DE LA HARPE, A. VALETTE, *La propriété (T) de Kazhdan pour les groupes localement compacts*. *Astérisque* **175**. Société Mathématique de France, Paris (1989).
- [FH] W. FEIT, G. HIGMAN, *The nonexistence of certain generalized polygons*. *J. Algebra* **1**, 114 – 131 (1964).
- [Fr] J. FRIEDMAN, *On the second eigenvalue and random walks in random d -regular graphs*. *Combinatorica* **11**, 331 – 362 (1991).
- [Ga] H. GARLAND, *p -adic curvature and the cohomology of discrete subgroups of p -adic groups*. *Ann. Math.* **97**, 375 – 423 (1973).
- [GKM] T. GELANDER, A. KARLSSON, G. MARGULIS, *Superrigidity, generalized harmonic maps and uniformly convex spaces*. Preprint Yale University, (2006).
- [Gr1] M. GROMOV, *Asymptotic invariants of infinite groups*. in *Geometric group theory. Volume 2 : Proceedings of the symposium held at the Sussex University, Brighton, July 14-19, 1991*. London Mathematical Society Lecture Note Series. **182**. Cambridge University Press. Cambridge (1993).
- [Gr2] M. GROMOV, *CAT(κ)-spaces : construction and concentration*. *J. Math. Sci., New York* **119**, No.2, 178 – 200 (2004); translation from *Zap. Nauchn. Semin. POMI* **280**, 101 – 140 (2001).
- [Gr3] M. GROMOV, *Random walk in random groups*. *Geom. Funct. Anal.* **13**, 73 – 146 (2003).
- [GS] M. GROMOV, R. SCHOEN, *Harmonic maps into singular spaces and p -adic superrigidity for lattices in groups of rank one*. *Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci.* **76**, 165 – 246 (1992).
- [IN] H. IZEKI, S. NAYATANI, *Combinatorial harmonic maps and discrete-group actions on Hadamard space*. Prépublication ArXiv math.DG/0410019.
- [Jo] J. JOST, *Equilibrium maps between metric spaces*. *Calc. Var. Partial Differ. Equ.* **2** 173 – 204 (1994).
- [Ka] D.A. KAZHDAN, *Connection of the dual space of a group with the structure of its closed subgroups*. *Funct. Anal. Appl.* **1**, 63 – 65 (1967); translation from *Funkts. Anal. Prilozh.* **1**, 71 – 74 (1967).
- [Kl] B. KLINGLER, *Sur la rigidité de certains groupes fondamentaux, l'arithméticité des réseaux hyperboliques complexes, et les "faux plans projectifs"*. *Invent. Math.* **153**, 105 – 143, (2003).
- [Ku] M. KURANISHI, *On the locally complete families of complex analytic structures*. *Ann. Math.* **75**, 536 – 577 (1962).

- [Le] M. LEDOUX, *The concentration of measure phenomenon*. Math. Surveys and Monographs **89**, Amer. Math. Soc., Providence, (2001).
- [Ma1] G.A. MARGULIS, *Arithmetic character and finite-dimensional representations of uniform lattices*. *Funct. Anal. Appl.* **8**, 258 – 259 (1974); translation from *Funkts. Anal. Prilozh.* **8**, 77 – 78 (1974).
- [Ma2] G.A. MARGULIS, *Discrete groups of motions of manifolds of non-positive curvature*. *Proc. int. Congr. Math.*, Vancouver 1974, Vol. 2, 21 – 34 (1975).
- [Ma3] G.A. MARGULIS, *Discrete subgroups of semisimple Lie groups*. *Ergebn. der Math. und ihrer Grenzgeb.*, 3. Folge, **17**. Springer, Berlin (1991).
- [May] U.F. MAYER, *Gradient flows on nonpositively curved metric spaces and harmonic maps*. *Commun. Anal. Geom.* **6**, 199 – 253 (1998).
- [Mo] N. MONOD, *Superrigidity for irreducible lattices and geometric splitting*. Prépublication ArXiv math.GR/0504241. To appear in *J. Amer. Math. Soc.*
- [NS] A. NAOR, L. SILBERMAN, Work in progress.
- [O1] Y. OLLIVIER, *Sharp phase transition theorems for hyperbolicity of random groups*. *Geom. Funct. Anal.* **14**, 595 – 679 (2004).
- [O2] Y. OLLIVIER, *On a small cancellation theorem of Gromov*. To appear in *Bull. Belg. Math. Soc.*
- [O3] Y. OLLIVIER, *A January 2005 invitation to random groups*. *Ensaio Mat.* **10**, (2005).
- [P1] P. PANSU, *Sous-groupes discrets des groupes de Lie : Rigidité, arithméticité*. Séminaire Bourbaki. Volume 1993/94. Exposés **778**. Astérisque **227**, Société Mathématique de France, Paris 69 – 105 (1995).
- [P2] P. PANSU, *Formules de Matsushima, de Garland et propriété (T) pour des groupes agissant sur des espaces symétriques ou des immeubles*. *Bull. Soc. Math. France*, **126**, 107 – 139 (1998).
- [Pi] M. PICHOT, *Harmonic analysis from quasi-periodic domains*. Prépublication (2005).
- [R1] Yu. RESHETNYAK, *A special mapping of a cone onto a polyhedron*. *Mat. Sb.*, N. Ser. **53**, 39 – 52 (1961).
- [R2] Yu. RESHETNYAK, *Inextensible mappings in a space of curvature no greater than K* . *Sib. Mat. Zh.* **9**, 918 – 927 (1968), *Transl. Sib. Math. J.* **9**, 918 – 927 (1968).
- [Si] L. SILBERMAN, *Addendum to "Random walk in random groups" by M. Gromov*. *Geom. Funct. Anal.* **13**, 147 – 177 (2003).
- [Ti1] J. TITS, *Classification of algebraic semisimple groups*. *Proc. Symp. Pure Math.* **9**, 33 – 62 (1966).
- [Ti2] J. TITS, *Free subgroups in linear groups*. *J. Algebra* **20**, 250 – 270 (1972).
- [Wa] M.T. WANG, *Generalized harmonic maps and representations of discrete groups*. *Commun. Anal. Geom.* **8**, 545 – 563 (2000).

- [W1] A. WEIL, *Sur les surfaces à courbure négative*. C.R. Acad. Sci. Paris **182**, 1069 – 1071 (1926).
- [W2] A. WEIL, *On discrete subgroups of Lie groups. I, II*. Ann. Math. **72**, 369 – 384 (1960) ; **75**, 578 – 602 (1962).
- [Z1] A. ZUK, *La propriété (T) de Kazhdan pour les groupes agissant sur les polyèdres*. C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I **323**, 453 – 458 (1996).
- [Z2] A. ZUK, *Property (T) and Kazhdan constants for discrete groups*. Geom. Funct. Anal. **13**, 643 – 670 (2003).

Pierre Pansu
Laboratoire de Mathématique d'Orsay
UMR 8628 du C.N.R.S.
Bâtiment 425
Université Paris-Sud - 91405 Orsay (France)
Pierre.Pansu@math.u-psud.fr
<http://www.math.u-psud.fr/~pansu>