DYNAMIQUE EN TEMPS GRAND DES ÉQUATIONS DE KDV GÉNÉRALISÉES AU VOISINAGE DES SOLITONS

YVAN MARTEL

Notes de Cours pour l'Ecole d'été de l'Institut Fourier à Grenoble du 20 juin au 8 juillet. Ce cours fait suite à celui d'Anne de Bouard, Equations dispersives nonlinéaires.

1. Introduction

Ces notes décrivent quelques résultats récents concernant le comportement asymptotique en temps grand des solutions des équations de KdV (Korteweg-de Vries) généralisées

$$u_t + (u_{xx} + u^p)_x = 0, \quad t, x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

dans le cas *sous critique* $p = 2, 3$, ou 4 et le cas *critique* $p = 5$. Ces résultats concernent les solutions qui sont proches d'un *soliton* ou de la somme de plusieurs solitons (*multi-solitons*).

On rappelle que le problème de Cauchy est bien posé pour (1) localement dans $H^1(\mathbb{R})$ (voir Kenig, Ponce and Vega [1]), c'est-à-dire que si $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$, alors il existe une unique (dans un sens approprié) solution maximale $u \in C([0,T), H^1(\mathbb{R})$ de (1) sur $[0,T)$ vérifiant $u(0) = u_0$. De plus, soit $T = +\infty$, la solution est *globale*, soit $0 < T < +\infty$, et dans ce cas, on a nécessairement $\lim_{t\uparrow T} \|u_x(t)\|_{L^2} = +\infty$ (*explosion en temps fini*). On sait de plus que les quantités suivantes (bien définies pour des solutions H^1) sont conservées au cours du temps:

$$\int u^2(t) = \int u^2(0), \tag{2}$$

$$E(u(t)) = \frac{1}{2}\int u_x^2(t) - \frac{1}{p+1}\int u^{p+1}(t) = \frac{1}{2}\int u_x^2(0) - \frac{1}{p+1}\int u^{p+1}(0). \tag{3}$$

Dans le cas sous critique $1 < p < 5$, l'inégalité de Gagliardo–Nirenberg

$$\forall v \in H^1(\mathbb{R}), \quad \int |v|^{p+1} \leq C(p)\left(\int v^2\right)^{\frac{p+3}{4}}\left(\int v_x^2\right)^{\frac{p-1}{4}} \tag{4}$$

montre que toutes les solutions H^1 sont globales et bornées dans H^1.

L'équation (1) est invariante par scaling et translation, c'est-à-dire que

si $u(t,x)$ est solution alors $\forall c > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $c^{\frac{1}{p-1}} u(c^{3/2}t, \sqrt{c}(x - x_0))$ est aussi solution.

On rappelle que l'équation (1) admet des solutions ondes progressives explicites, appelées *solitons.* Soit $Q(x)$ l'unique (aux translations près) solution positive H^1 de l'équation:

$$Q > 0, \quad Q \in H^1(\mathbb{R}), \quad Q_{xx} + Q^p = Q, \quad \text{i.e.} \quad Q(x) = \left(\frac{p+1}{2\cosh^2\left(\frac{p-1}{2}\,x\right)}\right)^{\frac{1}{p-1}}. \tag{5}$$

Alors, pour tout $c > 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$R_{c,x_0}(t,x) = Q_c(x - x_0 - ct) \quad \text{est solution de (1), où} \quad Q_c(x) = c^{\frac{1}{p-1}} Q(\sqrt{c}x).$$

On a par un calcul direct

$$\|Q_c\|_{L^2}^2 = c^{\frac{5-p}{2(p-1)}}\|Q\|_{L^2}^2 \quad \text{et} \quad \|(Q_c)_x\|_{L^2}^2 = c^{\frac{p+3}{2(p-1)}}\|Q_x\|_{L^2}^2, \tag{6}$$

de telle sorte que si $1 < p < 5$, alors $\|Q_c\|_{H^1} \to 0$ lorsque $c \to 0$, tandis que pour $p = 5$, $\|Q_c\|_{L^2}^2 = \|Q\|_{L^2}^2$. D'autre part, pour $p = 5$, on a aussi $E(Q_c) = 0$ pour tout $c > 0$, ce qui signifie que les quantitées invariantes ne peuvent pas contrôler la taille des solitons dans le cas critique.

Pour $1 < p < 5$, les solitons sont stables dans H^1, au sens suivant:

Stabilité du soliton ([13]). *Soit $1 < p < 5$. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $\|u(0) - Q\|_{H^1} \leq \delta$ alors $\forall t \geq 0$, il existe $x(t) \in \mathbb{R}$ tel que $\|u(t, . + x(t)) - Q\|_{H^1} \leq \epsilon$.*

Comme l'équation est invariante par scaling et translation, il suffit d'écrire la stabilité de la solution $Q(x - t)$ pour en déduire celle des autres solitons. Ce résultat n'utilise que les invariants de l'équation: énergie et norme L^2.

Le premier point de ce cours est de préciser le comportement en temps grand des solutions de (1) telles que $\|u(0)-Q\|_{H^1} \leq \delta$, pour δ petit. On montre que toutes ces solutions convergent en temps grand vers un soliton, au sens de la norme H^1, localement en espace. Ce résultat signifie que la famille des solitons est asymptotique stable. On discutera l'optimalité du résultat obtenu. Voir Section 2.

Le deuxième point de ce cours (voir Section 3) est de traiter le cas de solutions qui sont proches de *la somme de plusieurs solitons* de tailles différentes. La propriété de stabilité est encore vérifiée avec plusieurs solitons mais la démontration utilise des propriétés fines de l'équation (1), et non pas seulement les quantités invariantes comme dans le cas d'un seul soliton. On retrouve aussi que toute solution de ce type converge vers la somme de plusieurs solitons, c'est-à-dire que la famille des sommes de plusieurs solitons est asymptotiquement stable.

On montre aussi comment le résultat de stabilité peut être appliqué à la contruction de solutions exceptionnelles, de type *multi-solitons* en temps grand. Ce sont des solutions qui se comportent quand $t \to +\infty$ exactement comme la somme de plusieurs solitons dans $\mathbb{R}$ tout entier. Dans les cas intégrables ($p = 2$ ou 3), ces solutions sont connues par la transformation d'Inverse Scattering et ont bien d'autres propriétés, notamment celle de décrire l'interaction entre plusieurs solitons. Pour le cas non complètement intégrable, $p = 4$ l'existence des ces solutions peut être considérée comme surprenante.

Pour $p = 5$, le comportement des solutions autour du soliton est différente. Le soliton est *instable*, c'est-à-dire que la propriété précédente n'est pas vérifiée. On sait en fait qu'il existe une large classe de données initiales arbitrairement proches de $Q(x)$ dans $H^1(\mathbb{R})$ telles que la solution $u(t)$ de (1) explose en temps fini. Ce résultat sera présenté dans la dernière section. La notion de convergence vers un soliton est encore présente dans le cadre de l'exposant critique $p = 5$, même dans le cas de l'explosion, à travers la notion de *profil à l'explosion* (voir aussi l'exposé de recherche de Pierre Raphael). La solution reste en fait proche d'un soliton $Q_{c(t)}$, mais le coefficient $c(t)$ tend vers $+\infty$. Voir Section 4.

Pour mémoire, signalons que si $p > 5$, le soliton est instable, mais le phénomène d'explosion en temps fini n'est pas connu.

La plupart des travaux présentés dans ce cours ont été réalisé en collaboration avec Frank Merle. Un des travaux est en collaboration avec Frank Merle et Tai-Peng Tsai.

2. Complétude asymptotique des solitons

Dans cette section, on présente le résultat de stabilité asymptotique démontré dans [6] et amélioré dans [10].

Théorème 1 ([6], [10])**.** *Soit $p = 2$, 3 ou 4. Soit $u(t)$ une solution H^1 de* (1)*. Il existe $\alpha_0 > 0$ tel que si*

$$\|u(0) - Q\|_{H^1} \leq \alpha_0. \tag{7}$$

alors il existe $c^+ > 0$ proche de 1 et une fonction $x : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que

$$v(t, x) = u(t, x) - Q_{c^+}(x - x(t)) \quad \textit{satisfait} \quad \lim_{t \to +\infty} \|v(t)\|_{H^1(x>t/2)} = 0. \tag{8}$$

De plus, $\lim_{t\to+\infty} \frac{dx}{dt}(t) = c^+$.

Ce résultat signifie que la fonction $u(t, x+x(t))$ non seulement reste proche de Q pour tout temps, comme indiqué par le résultat de stabilité H^1, mais de plus *converge* vers Q_{c^+} lorsque $t \to +\infty$, où c^+ est proche de 1. C'est un résultat de *complétude asymptotique* de la famille des solitons.

Cependant, il faut remarquer que la convergence a lieu dans un sens particulier, local en espace. En fait, la convergence en norme H^1 est vraie dans tout intervalle de la forme $x > \beta t$, pour $\beta > 0$, pourvu que α_0 soit choisi assez petit, en fonction de β.

Cette notion de convergence ne peut pas être améliorée car si on suppose $\|v(t)\|_{H^1(\mathbb{R})} \to 0$ lorsque $t \to +\infty$, alors $v \equiv 0$ et $u(t)$ est exactement un soliton. Ceci est une conséquence de la caractérisation variationnelle de Q: Q est la seule fonction (aux translations près) minimisant la fonctionnelle d'énergie à norme L^2 fixée. Cela signifie qu'en général, un autre phénomène se produit pour $x < \beta t$. En effet, $u(t)$ peut très bien contenir un petit soliton (petit soliton implique de vitesse faible, inférieure à β), et/ou de la *dispersion*, c'est-à-dire qu'une partie de la norme L^2 est perdue pour $x < 0$, dans une zone où l'on s'attend à ce que $u(t)$ tende vers 0 en norme L^∞ (le comportement exact de $u(t)$ pour $x < 0$ n'est pas connu).

La dernière assertion décrit le comportement de $x'(t)$ lorsque $t \to +\infty$. On pourrait trouver insuffisante l'information obtenue sur $x(t)$ puisque elle ne concerne que la dérivée. Mais, il s'avère qu'en général, on ne peut pas affirmer que $x(t) - c^+t$ converge ou même reste borné. En effet, le résulat suivant fournit un exemple (seulement pour $p = 2$) où $x(t)$ s'écarte de t comme $\sqrt{\log t}$ lorsque le temps devient grand.

Théorème 2 ([10])**.** *Soit $p = 2$. Il existe $\alpha_0 > 0$ tel que pour tout $0 < \alpha < \alpha_0$ il existe une solution H^1 $u(t)$ de (1) telle que*

$$\sup_{t\geq 0} \|u(t) - Q(x - x(t))\|_{H^1} \leq \alpha,$$

et

$$\lim_{t\to+\infty} \|u(t) - Q(x - x(t))\|_{H^1(x\geq t/2)} = 0,$$

pour une fonction $x(t)$ de classe C^1 satisfaisant pour $\kappa > 0$,

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{x(t) - t}{\sqrt{\log(t)}} = \kappa.$$

Pour montrer ce résultat on utilise les formules explicites des multi-solitons pour le cas intégrable $p = 2$, et on place un nombre infini de solitons à droite du soliton principal. La taille des solitons décroît de telle sorte que la série converge dans H^1. Cependant, on montre que le *shift* résultant sur le soliton principal devient infini. En effet, lorsque deux solitons se croisent, leur trajectoire subit un décalage, positif pour le soliton le plus rapide, négatif pour l'autre. Voir Miura [12] pour la méthode d'inverse scattering et les propriétés de l'équation de KdV déduites de l'intégrabilité totale de cette équation.

La démontration du Théorème 1 repose essentiellement sur deux propriétés de l'équation de KdV généralisée : la première est une propriété de monotonie (ou presque monotonie) de certaines quantités locales en espace liées aux invariants (norme L^2 et énérgie) de l'équation. La deuxième propriété est une rigidité de l'équation de KdV autour des solitons. Cette rigidité peut s'écrire au niveau de l'équation nonlinéaire, et elle est une conséquence d'une rigidité de l'opérateur linéarisé autour de Q. Nous présentons ces deux outils dans les sections 2.1 et 2.2. La fin de la démontration du Théorème 1 sera esquisée dans la section 2.3

Dans le Théorème 1, on suppose $p = 2$, 3 ou 4 et $\|u(0) - Q\|_{H^1}$ petit. Par le résultat de stabilité, la solution $u(t)$ est proche de $Q(x - y(t))$ pour une certaine fonction $y(t)$. Dans ces conditions, on peut utiliser les invariances de l'équation (scaling et translation) pour *moduler* la solution. On obtient le lemme suivant:

Lemme 1. *Pour α_0 assez petit, il existe des fonctions $c : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et une constante $K > 0$ telles que la fonction $\varepsilon(t)$ définie par*

$$\varepsilon(t, x) = u(t, x) - R(t, x), \quad \textit{où} \quad R(t, x) = Q_{c(t)}(x - x(t)), \tag{9}$$

satisfait, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\int R(t, x)\varepsilon(t, x)dx = \int (x - x(t))R(t, x)\varepsilon(t, x)dx = 0, \tag{10}$$

$$|c(t) - 1| + |c'(t)| + |x'(t) - c(t)| + \|\varepsilon(t)\|_{H^1} \le K\alpha_0. \tag{11}$$

De plus,

$$|c'(t)|^2 + |x'(t) - c(t)|^2 \le K \int \varepsilon^2(t, x)e^{-\frac{1}{2}|x-x(t)|}dx. \tag{12}$$

La preuve de lemme est basée sur le théorème des fonctions implicites, appliqué à $u(t)$ pour tout t fixé. Dans ces notes, nous admettons ce résultat. Remarquons que le résulat de stabilité asymptotique signifie $\varepsilon(t) \to 0$ et $c(t) \to c^+$ lorsque $t \to +\infty$.

2.1. **Propriété de "presque monotonie".** Dans cette section, nous introduisons un outil essentiel dans l'étude de l'équation de KdV généralisée : des versions locales des deux invariants, norme L^2 et énérgie sont "presque" monotones en temps. Après l'énoncé et la démonstration de cet outil, nous proposons une application simple qui est une première propriété des solutions proches des solitons. Voir Lemme 3.

Soit $K > 0$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$\phi(x) = \frac{K}{\pi} \arctan(\exp(x/K)),$$

de telle sorte que $\lim_{+\infty}\phi = 1$, $\lim_{-\infty}\phi = 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\phi(-x) = 1-\phi(x)$. On obtient aussi

$$\phi'(x) = \frac{1}{K\pi\cosh(x/K)}, \quad \phi'''(x) \le \frac{1}{K^2}\phi'(x). \tag{13}$$

Soit $\sigma > 0$, $x_0 > 0$. On définit, pour $t_0 \in \mathbb{R}$, pour tout $t \le t_0$:

$$I_{x_0,t_0}(t) = \int u^2(t,x)\,\phi\left(x - x(t_0) + \sigma(t_0 - t) - x_0\right)dx,$$

et

$$J_{x_0,t_0}(t) = \int \left(u_x^2 - \frac{2}{p+1}u^{p+1} + u^2\right)(t,x)\,\phi\left(x - x(t_0) + \sigma(t_0 - t) - x_0\right)dx.$$

On a alors le résultat suivant:

Lemme 2. *Pour tout $0 < \sigma < \frac{1}{2}$, pour tout $K > \sqrt{\frac{2}{\sigma}}$, il existe $\theta > 0$ tel que si α_0 est assez petit alors pour tout $t, t_0 \in \mathbb{R}$, $t \le t_0$,*

$$I_{x_0,t_0}(t_0) - I_{x_0,t_0}(t) \le \theta \exp\left(-\frac{x_0}{K}\right), \tag{14}$$

$$J_{x_0,t_0}(t_0) - J_{x_0,t_0}(t) \le \theta \exp\left(-\frac{x_0}{K}\right). \tag{15}$$

Preuve du lemme 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^3. On a par l'équation (1) et des calculs élémentaires :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int u^2 f &= 2\int u_t u f = -2\int (u_{xx} + u^p)_x u f = 2\int (u_{xx} + u^p)(u_x f + u f') \\
&= \int \left(-3u_x^2 + \frac{2p}{p+1}u^{p+1}\right) f' - 2\int u_x u f'' \\
&= \int \left(-3u_x^2 + \frac{2p}{p+1}u^{p+1}\right) f' + \int u^2 f'''.
\end{aligned}$$

et, de façon similaire:

$$\frac{d}{dt}\int \left(u_x^2 - \frac{2}{p+1}u^{p+1}\right) f = \int \left[-\left(u_{xx} + u^p\right)^2 - 2u_{xx}^2 + 2pu_x^2 u^{p-1}\right] f' + \int u_x^2 f'''.$$

Soit $0 < \sigma < \frac{1}{2}$, $x_0 > 0$, $t_0 \in \mathbb{R}$, et $K > \sqrt{\frac{2}{\sigma}}$. Soit $\psi(t,x) = \phi(x - x(t_0) + \sigma(t_0 - t) - x_0)$. Par les identités précédentes, pour tout $t \le t_0$, on a

$$\frac{d}{dt}\int u^2\psi = -\int \left(3u_x^2 + \sigma u^2 - \frac{2p}{p+1}u^{p+1}\right)\psi_x + \int u^2 \psi_{xxx}.$$

Par (13) et $\frac{1}{K^2} \le \frac{\sigma}{2}$, on obtient

$$\frac{d}{dt}\int u^2\psi \le -\int \left(3u_x^2 + \frac{\sigma}{2}u^2 - \frac{2p}{p+1}|u|^{p+1}\right)\psi_x.$$

Soit $R_0 > 0$ à fixer plus tard. Pour t, x tels que $|x - x(t)| \ge R_0$, par $|Q(x)| \le Ce^{-|x|}$, et l'inégalité $\|v\|_{L^\infty}^2 \le 2\|v_x\|_{L^2}\|v\|_{L^2}$, on a

$$|u(t,x)| \le R(t,x) + \|u(t) - R(t)\|_{L^\infty} \le Ce^{-\frac{R_0}{2}} + \sqrt{2}\alpha_0.$$

Donc, pour α_0 petit et R_0 grand, on a pour de tels t, x: $\frac{2p}{p+1}|u(t,x)|^{p-1} \le \sigma/4$. Maintenant α_0 et R_0 sont fixés à de telles valeurs.

Si $|x-x(t)| \le R_0$ alors $|x-x(t_0)+\sigma(t_0-t)-x_0| \ge -|x-x(t)|+|x(t)-x(t_0)+\sigma(t_0-t)-x_0| \ge -R_0 + \frac{t_0-t}{2} + x_0$, et donc

$$|\psi_x(t,x)| \le Ce^{-\frac{t_0-t}{2K}}e^{-\frac{x_0}{K}}.$$

Donc, puisque $\int |u|^{p+1} \le C$, on obtient

$$\frac{d}{dt}\int u^2\psi \le -\int \left(3u_x^2 + \frac{\sigma}{4}u^2\right)\psi_x - Ce^{-\frac{t_0-t}{2K}}e^{-\frac{x_0}{K}} \le -Ce^{-\frac{t_0-t}{2K}}e^{-\frac{x_0}{K}}. \tag{16}$$

Par intégration entre t et t_0, on obtient, pour une constante $\theta > 0$,

$$I_{x_0,t_0}(t_0) - I_{x_0,t_0}(t) \le \theta \exp\left(-\frac{x_0}{K}\right).$$

De même, on a:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int \Big(u_x^2 - \frac{2}{p+1}u^{p+1}\Big)\psi &= \int \Big[-(u_{xx}+u^p)^2 - 2u_{xx}^2 + 2pu_x^2u^{p-1}\Big]\psi_x \\ &\quad -\sigma\int\Big(u_x^2 - \frac{2}{p+1}u^{p+1}\Big)\psi_x(t) + \int u_x^2\psi_{xxx}.\end{aligned}$$

En utilisant (13), on obtient ($\psi_x > 0$),

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\int \Big(u_x^2 - \frac{2}{p+1}u^{p+1}\Big)\psi \\ &\quad \le -\int \Big[(u_{xx}+u^p)^2 + 2u_{xx}^2 + \frac{\sigma}{2}u_x^2 - 2pu_x^2|u|^{p-1} - \frac{2\sigma}{p+1}|u|^{p+1}\Big]\psi_x.\end{aligned}$$

Par le même argument que plus haut, on contrôle les termes nonlinéaires, et donc par (16), on obtient:

$$\frac{d}{dt}\int \Big(u_x^2 - \frac{2}{p+1}u^{p+1} + u^2\Big)\psi \le -\int \left(2u_{xx}^2 + \frac{\sigma}{4}u_x^2 + \frac{\sigma}{8}u^2\right)\psi_x - Ce^{-\frac{t_0-t}{2K}}e^{-\frac{x_0}{K}}.$$

Donc, par intégration, on obtient

$$J_{x_0,t_0}(t_0) - J_{x_0,t_0}(t) \le \theta \exp\left(-\frac{x_0}{K}\right).$$

□

Comme annoncé, nous présentons une première application de ce résultat à une solution $u(t)$ proche d'un soliton (dans le cadre du lemme 1). La propriété de "presque monotonie" sera utilisée à d'autres endroits pour la preuve du Théorème 1.

Lemme 3. *Pour $K > 0$ assez grand, la propriété suivante est vérifiée par la fonction $\varepsilon(t)$.*

$$\limsup_{t\to+\infty}\int_{x>x(t)+x_0} (\varepsilon_x^2 + \varepsilon^2)(t,x)dx \le C\exp\left(-\frac{x_0}{2K}\right). \tag{17}$$

Cette propriété signifie que pour $x > x(t)+x_0$, la solution $u(t,x)$ ne diffère du soliton $Q(x-x(t))$ que d'un terme d'erreur exponentiellement petit en x_0. Ce résultat est optimal puisque c'est la décroissance du soliton. Cela règle le problème du comportement de la solution à droite du soliton.

Preuve du lemme 3. On pose :

$$l(y_0) = \int \left(u_x^2 + u^2\right)(0, x + x(0))\phi(x - y_0)dx.$$

Par les propriétés de ψ, on a $\lim_{y_0 \to +\infty} l(y_0) = 0$, puique $u(0) \in H^1(\mathbb{R})$.

On utilise le lemme 2 sur la solution $u(t)$, pour $\sigma = \frac{1}{4}$ (par exemple), pour $x_0 > 0$, $t_0 > 0$ quelconques et $t = 0$. D'après (15) et la borne uniforme $\|u(t)\|_{L^\infty} \leq C$, on obtient

$$J_{x_0,t_0}(t_0) \leq J_{x_0,t_0}(0) + \theta \exp\left(-\frac{x_0}{K}\right) \leq C\, l(x(t_0) - x(0) - \frac{1}{4}t_0 + x_0) + \theta \exp\left(-\frac{x_0}{K}\right). \tag{18}$$

On observe ensuite que

$$\int |u(t_0, x + x(t_0))|^{p+1}\phi(x - x_0)dx$$
$$\leq \|u(t_0, . + x(t_0))\|^{p-1}_{L^\infty(x \geq \frac{x_0}{2})} \int u^2(t_0, x + x(t_0))\phi(x - x_0)dx + C\phi\left(-\frac{x_0}{2K}\right)\int u^2.$$

D'après la décomposition $u(t, x + x(t)) = Q_{c(t)}(x) + \varepsilon(t, x + x(t))$, et $\|\varepsilon(t)\|_{L^\infty} \leq C\|\varepsilon(t)\|_{H^1} \leq K_1\alpha_0$, il est clair que $\|u(t_0)\|^{p-1}_{L^\infty(x \geq \frac{x_0}{2} + x(t_0))} \leq \frac{1}{2}$ pour x_0 assez grand, indépendant de t_0, et pour α_0 petit. Par conséquent, utilisant (18), pour x_0 assez grand, on obtient:

$$\int \left(u_x^2 + u^2\right)(t_0, x + x(t_0))\phi(x - x_0)dx \leq C\, l(x(t_0) - x(0) - \frac{t_0}{4} + x_0) + C \exp\left(-\frac{x_0}{2K}\right). \tag{19}$$

Puisque $x(t_0) - x(0) - \frac{t_0}{4} \geq \frac{1}{4}t_0$ par $x'(t) \geq \frac{1}{2}$, and puisque $\lim_{y_0 \to +\infty} l(y_0) = 0$, on obtient :

$$\limsup_{t \to +\infty} \int \left(u_x^2 + u^2\right)(t, x + x(t))\phi(x - x_0)dx \leq C \exp\left(-\frac{x_0}{2K}\right),$$

et donc, par les propriétés de décroissance de $Q(x)$, on obtient (17). $\square$

2.2. **Rigidité linéaire et nonlinéaire des solitons.** Par la borne uniforme sur $u(t)$ dans H^1, on peut considérer une suite $t_n \to +\infty$, une fonction $\widetilde{u}_0 \in H^1(\mathbb{R})$ et un réel positif $\widetilde{c}_0 > 0$ tels que

$$c^{-\frac{1}{p-1}}(t_n)u\Big(t_n, \frac{1}{\sqrt{c(t_n)}}. + x(t_n)\Big) \rightharpoonup \widetilde{u}_0 \quad \text{et} \quad c(t_n) \to \widetilde{c}_0 \quad \text{lorsque } n \to +\infty.$$

Soit $\widetilde{u}(t)$ la solution de (1) définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ correspondant à $\widetilde{u}(0) = \widetilde{u}_0$. Cette solution est une solution asymptotique, et le fait qu'elle soit issue du comportement asymptotique de $u(t)$ implique des propriétés de rigidité fortes sur $\widetilde{u}(t)$.

On admet pour la suite que la solution $\widetilde{u}(t)$ a les propriétés suivantes:

Proposition 3 (Propriété de décroissance exponentielle de la solution asymptotique)**.** *Il existe C, $\theta > 0$, et une fonction $\widetilde{y} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tels que*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad |\widetilde{u}(t, x + \widetilde{y}(t))| \leq Ce^{-\theta|x|}. \tag{20}$$

C'est évidemment une information très importante sur la solution $\tilde{u}(t)$, à relier avec la décroissance exponentielle de toute solution L^2 compacte de l'équation de KdV (voir des formes générales dans [2]). On présente maintenant un résultat qui va permettre de déterminer $\widetilde{u}(t)$.

Théorème 4 (Rigidité nonlinéaire autour de Q [6])**.** *Soit $p = 2$, 3 ou 4. Soit $\widetilde{u}(t)$ une solution H^1 de* (1)*. Si $\|u_0 - Q\|_{H^1} \leq \alpha_0$, pour α_0 assez petit et si la solution $\widetilde{u}(t)$ vérifie* (20)*, alors il existe $\sigma > 0$, $x_1 \in \mathbb{R}$ tels que*

$$\widetilde{u}(t,x) = Q_\sigma(x - x_1 - \sigma t).$$

Autrement dit, la solution $\tilde{u}(t)$ issue du comportement asymptotique de la solution $u(t)$ originale est nécessairement exactement un soliton. On voit donc qu'au moins le long de la suite (t_n), $u(t)$ converge dans H^1 faible vers un soliton. On verra dans la prochaine section comment conclure la démonstration du Théorème 1 ayant cette information.

Attachons nous pour l'instant à justifier le Théorème 4. Une démonstration complète de ce résultat serait trop longue dans le cadre de ces notes. On va présenter seulement un des arguments clé pour l'obtenir.

Idée de la preuve du théorème 4. Sous les hypothèses du théorème, on voit que $\widetilde{u}(t)$ admet une décomposition en $\widetilde{\varepsilon}(t)$, $\widetilde{c}(t)$, $\widetilde{x}(t)$ et $\widetilde{R}(t)$ comme la solution $u(t)$ par le lemme 1. En particulier $\widetilde{\varepsilon}$ vérifie les conditions d'orthogonalité et de taille imposées par le lemme 1. De plus, par un calcul direct, $\widetilde{\varepsilon}$ vérifie l'équation suivante:

$$\varepsilon_t + \varepsilon_{xxx} = -\frac{c'(t)}{2c(t)}\left(\frac{2R}{p-1} + (x - x(t))R_x\right) + (x'(t) - c(t))R_x - \big((\varepsilon + R)^p - R^p\big)_x. \tag{21}$$

De plus, par l'hypothèse (20) sur $\widetilde{u}(t)$ et la décroissance de Q en x, $\widetilde{\varepsilon}(t,x)$ vérifie aussi la propriété (20).

Remarquons que la conclusion du Théorème 4 est équivalente à obtenir $\widetilde{\varepsilon} \equiv 0$ pourvu que α_0 soit assez petit. On raisonne par contradiction, en supposant qu'il existe une suite de solutions $(\widetilde{u}_n)$, satisfaisant $\|\widetilde{u}_n(0) - Q\|_{H^1} \to 0$ lorsque $n \to +\infty$ et les hypothèses du Théorème 4. Soit $\widetilde{\varepsilon}_n \not\equiv 0$ associé à u_n par la décomposition du lemma 1.

On admet que l'on peut obtenir l'estimation suivante sur la suite $\widetilde{\varepsilon}_n(t)$:

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|\widetilde{\varepsilon}_n(t)\|_{H^1} \leq C \sup_{t\in\mathbb{R}} \|\widetilde{\varepsilon}_n(t)\|_{L^2}.$$

Cela nous permet de montrer qu'une version renormalisée de la suite $(\widetilde{\varepsilon}_n(t))$ converge vers une solution $w(t)$ du problème linéaire suivant:

$$w_t - (Lw)_x = \alpha(t)\left(\tfrac{2Q}{p-1} + xQ'\right) + \beta(t)Q', \tag{22}$$

où $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ sont des fonctions de t données, et

$$Lw = -w_{xx} + w - pQ^{p-1}w,$$

est l'opérateur linéarisé autour de Q.

De plus, w vérifie aussi une propriété de décroissance exponentielle

$$\forall y \in \mathbb{R}, \forall s \in \mathbb{R}, \quad |w(s,y)| \leq Ce^{-\theta|y|}, \tag{23}$$

et satisfait les mêmes conditions d'orthogonalité que $\widetilde{\varepsilon}_n(t)$.

Pour conclure la preuve par contradiction, il suffit de montrer que nécessairement $w \equiv 0$. On s'est donc ramené à démontrer une propriété de rigidité sur un problème linéaire. Cette propriété s'écrit:

Proposition 5. *Soit $p = 2$, 3 et 4. Soit $w(t)$ une solution H^1 de* (22) *uniformément bornée dans H^1 vérifiant* (23) *et les conditions d'orthogonalité* (10)*. Alors $w \equiv 0$.*

La démonstration originale de ce résultat dans [6] est délicate et repose sur des propriétés de positivité d'une certaine forme quadratique sous les hypothèses d'orthogonalité (10).

On présentera au cours de l'Ecole d'été à Grenoble une nouvelle démonstration, plus directe et plus simple de ce résultat, à paraître prochainement, voir [4]. □

2.3. **Conclusion de la preuve du Théorème 1.** Les arguments présentés plus haut permettent de conclure que pour une sous-suite de temps $t_n \to +\infty$, la solution $u(t)$ avait le comportement de convergence désiré, dans H^1_{loc}, et donc dans L^2_{loc} fort. Il s'agit donc d'une part d'améliorer la notion de convergence pour obtenir convergence dans H^1 fort (localement en espace cependant) et d'autre part, d'obtenir convergence pour toute la suite vers un même soliton Q_{c^+}. Tout ceci s'obtient uniquement à l'aide des propriétés de "presque monotonie" de la section 2.1.

Une première observation est que grâce au lemma 3 et à la convergence H^1 faible, on a convergence de $\varepsilon(t_n)$ vers 0 dans $L^2(x > x(t) - x_0)$ pour tout x_0 lorsque $n \to +\infty$. En utilisant la presque monotonie de $\mathcal{I}(t)$, par un argument similaire à celui utilisé pour la preuve du lemma 3, on a en fait convergence dans $L^2(x > t/2)$, pour toute la suite de temps (voir Etape 3 de la démonstration du Théorème 1 dans [10]).

Par les propriétés de presque monotonie de $\mathcal{J}(t)$, la caractérisation de Q, et la convergence faible dans H^1, on est alors capable de montrer la convergence de $\varepsilon(t)$ vers zéro dans $H^1(x > t/2)$.

Une autre démonstration du théorème 1 a été proposée dans [10]. C'est une démonstration directe, sans problème asymptotique à classifier. Elle consiste en localiser spatialement les arguments utilisés dans [6] pour montrer la Proposition 5.

3. Cas des multi-solitons

Dans cette section, on considère les mêmes questions pour le cas de la somme de plusieurs solitons. Le premier résultat est l'analogue des résultats précédents pour le cas d'un soliton.

Théorème 6 (Stabilité et stabilité asymptotique des multi-solitons [9])**.** *Soit $p = 2$, 3 ou 4. Soit N vitesses $0 < c_1^0 < \ldots < c_N^0$ données. Soit $u(t)$ une solution H^1 de (1). Si $u(0)$ vérifie*

$$\left\| u(0) - \sum_{j=1}^{N} Q_{c_j^0}(. - x_j^0) \right\|_{H^1} \leq \alpha, \quad \text{où} \quad x_j^0 > x_{j-1}^0 + L, \text{ pour tout } j = 2, \ldots, N, \tag{24}$$

pour α assez petit et L assez grand, alors il existe $x_1(t), \ldots, x_N(t)$ tels que les deux propriétés suivantes sont vérifiées:

(i) Stabilité de la somme de N solitons.

$$\forall t \geq 0, \quad \left\| u(t) - \sum_{j=1}^{N} Q_{c_j^0}(x - x_j(t)) \right\|_{H^1} \leq A_0 \left(\alpha + e^{-\gamma_0 L}\right). \tag{25}$$

(ii) Stabilité asymptotique de la somme de N solitons. Il existe $c_1^+, \ldots, c_N^+$, avec $|c_j^+ - c_j^0| \leq A_0 \left(\alpha + e^{-\gamma_0 L}\right)$, tels que

$$\left\| u(t) - \sum_{j=1}^{N} Q_{c_j^+}(x - x_j(t)) \right\|_{H^1(x \geq c_1^0 t/2)} \to 0, \quad \frac{dx_j}{dt}(t) \to c_j^+ \quad \text{lorsque } t \to +\infty. \tag{26}$$

Dans ce résultat, on obtient la stabilité pour $t > 0$ de la somme de plusieurs solitons qui sont déjà bien ordonnés (les plus rapides à droite) et bien découplés (à une distance assez grande). Comprendre le comportement de la solution pour $t < 0$ est un tout autre problème, complètement ouvert, sauf dans les cas $p = 2$ et $p = 3$ par la théorie de l'intégrabilité.

Dans le cas d'un seul soliton, on sait que la convergence dans $H^1(\mathbb{R})$ implique que $u(t)$ est exactement un soliton, et que cela résulte simplement des invariants. Que dire dans le cas de plusieurs solitons, si la convergence dans (26) a lieu dans $H^1(\mathbb{R})$? Une réponse complète à cette question est donnée dans le résultat suivant.

Théorème 7 ([3])**.** *Soit $p = 2$, 3, ou 4. Soit $N \in \mathbb{N}$, $0 < c_1 < c_2 < \ldots < c_N$, et $x_1, \ldots, x_N \in \mathbb{R}$. Il existe une et une seule fonction $U \in C(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}))$, qui est une solution H^1 de (1) et telle que*

$$\lim_{t\to+\infty} \Big\| U(t) - \sum_{j=1}^{N} Q_{c_j}(. - x_j - c_j t) \Big\|_{H^1(\mathbb{R})} = 0. \tag{27}$$

De plus, cette solution vérifie $U \in C(\mathbb{R}, H^s(\mathbb{R}))$ pour tout $s \geq 0$, et il existe des constantes $A_s > 0$ telles que pour tout $s \geq 0$, pour tout $t \geq T_0$,

$$\Big\| U(t) - \sum_{j=1}^{N} Q_{c_j}(. - x_j - c_j t) \Big\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq A_s e^{-\gamma t}, \tag{28}$$

où $\gamma = \sigma_0\sqrt{\sigma_0}/32$ et $\sigma_0 = \min(c_1, c_2 - c_1, c_3 - c_2, \ldots, c_N - c_{N-1})$.

Par rapport à ce que l'on déjà vu plus haut concernant le cas de un soliton, la partie stabilité asymptotique du théorème 6 n'apporte pas de réelle nouveauté. En revanche, la partie stabilité dans le cas où il y a plusieurs solitons nécessite des arguments complètement nouveaux par rapport au cas d'un seul soliton traité par Weinstein [13]. Il faut utiliser des propriétés fines de l'équation. Un outil essentiel est encore la propriété de monotonie de $\mathcal{I}(t)$ vue dans la section 2.1. On a choisi de ne pas présenter ces arguments ici, mais plutôt de se concentrer sur la démonstration du théorème 7, notamment la partie existence. Il se trouve que l'argument principal pour l'existence de la solution $\varphi(t)$ dans le théorème 7 est une variante du résultat de stabilité Théorème 6 (i).

Idée de la preuve du théorème 7. Soit $R(t) = \sum_{j=1}^{N} R_j(t)$, où $R_j(t) = Q_{c_j}(. - x_j - c_j t)$. On utilise un procédé asymptotique pour construire la solution $U(t)$.

Soit (T_n) une suite croissante de $\mathbb{R}^+$ vérifiant $T_n \to +\infty$ et soit $u_n(t)$ la solution de (1) vérifiant

$$u_n(T_n) = R(T_n).$$

A n fixé, la solution $u_n(t)$ n'est pas exactement ce que l'on cherche. Comme $R(t)$ n'est pas une solution de l'équation de KdV (1), la différence $u_n(t) - R(t)$ reste au mieux petite mais n'a pas de raison de tendre vers 0 lorsque $t \to +\infty$. On va plutôt construire la solution désirée comme limite des solutions $u_n(t)$ lorsque $n \to +\infty$. Il faut d'abord obtenir de la compacité sur la suite (u_n).

A ce niveau, la démonstration passe par le résultat de stabilité de la somme de plusieurs solitons: pour tout $t \in [0, T_n]$:

$$\|u_n(t) - R(t)\|_{H^1} \leq C e^{-\gamma t} \quad \text{uniforme en } n. \tag{29}$$

Cela correspond à appliquer le Théorème 6 à $u_n(t)$ avec $\alpha = 0$ et $L = \sigma t$. En réalité cela n'est pas exactement cela puisque il faut raisonner en revenant dans le temps (de $t = T_n$ vers $t = 0$). Ceci n'amène que des changements mineurs dans les démonstrations.

Il est remarquable dans (29) que les constantes soient uniformes en n, bien que $T_n \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$. D'autre part, le terme majorant en $e^{-\gamma t}$ est optimal puique $R(t)$ diffère d'une solution à cause des interactions entre les divers solitons, qui est de l'ordre de $e^{-\gamma t}$ pour t grand.

Utilisons maintenant l'estimation uniforme pour construire une solution limite: par (29), il existe $U(0) \in H^1(\mathbb{R})$ tel que

$$u_n(0) \to U(0) \text{ dans } H^1 \text{ lorsque } n \to +\infty.$$

Soit $t > 0$. Par dépendance continue de la solution par rapport à la donnée initiale, on a $u_n(t) \to U(t)$ dans $H^1(\mathbb{R})$ lorsque $n \to +\infty$. En passant à la limite $n \to +\infty$ dans (29), on trouve:

$$\|U(t) - R(t)\|_{H^1} \leq Ce^{-\gamma t}.$$

Cette estimation étant vraie pour tout $t > 0$, la solution $U(t)$ est bien celle que l'on cherchait. □

Dans l'exposé de recherche de Khaled El Dika, on verra comment des résultats similaires peuvent être démontrés pour une équation proche de l'équation de KdV généralisée, mais présentant certaines caractéristiques bien différentes. Il s'agit d'une équation introduite par Peregrine et Benjamin, Bona et Mahony, comme modèle concurrent de l'équation de KdV.

Le cas de l'équation de Schrödinger non-linéaire est aussi très intéressant à considérer. A notre connaissance, il n'existe pas de résultat de stabilité asymptotique pour les ondes solitaires de l'équation de Schrödinger dans l'espace H^1 par exemple.

En revanche, deux articles à paraître concerne l'étude du problème des multi-ondes solitaires dans l'espace d'énergie pour l'équation de Schrödinger non linéaire sous critique. Un des articles, en collaboration avec Frank Merle et Tai-Peng Tsai concerne la stabilité asymptotique de la somme de plusieurs ondes solitaires. On obtient un résultat dans l'espace d'énergie, pourvu que la nonlinéarité soit suffisamment plate au voisinage de 0 et que la dimension de l'espace soit $d = 1$, 2 ou 3. Le cas d'une nonlinéarité puissance pure ne rentre pas dans les hypothèses requises.

Le deuxième article, en collaboration avec Frank Merle, concerne l'existence de solutions de type multi-ondes solitaires et présente l'analogue du théorème 7 pour les équations de Schrödinger nonlinéaires, sous des hypothèses très générales, en toute dimension d'espace (la seule hypothèse est la stabilité nonlinéaire de chacune des ondes solitaires).

4. Explosion en temps fini pour l'équation de KdV critique

Pour $p = 5$, les solitons sont instables. De plus, il existe une large classe de données initiales proches de Q qui conduisent la solution à l'explosion en temps fini. Toutefois, la solution qui explose reste à un scaling près proche de Q, c'est la notion de profil à l'explosion. Les résultats disponibles actuellement sur l'explosion pour l'équation de KdV généralisée critique sont résumés dans le théorème suivant.

Théorème 8 (Explosion en temps fini [7], [11], [8])**.** *Soit $p = 5$. Soit $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$ vérifiant*

$$\|u_0 - Q\|_{H^1} \leq \alpha_0,$$

où $\alpha_0 > 0$ *est assez petit. Supposons aussi que*

$$E(u_0) = E_0 < 0.$$

Soit $u(t)$ *la solution de (1) correspondant à* $u(0) = u_0$. *Supposons de plus que* u_0 *vérifie pour un certain* $\theta > 0$,

$$\forall x_0 > 0, \quad \int_{x \geq x_0} u_0^2(x)dx \leq \frac{\theta}{x_0^6}. \tag{30}$$

Alors,
(i) La solution $u(t)$ *explose en temps fini, c'est-à-dire qu'il existe* $0 < T < +\infty$ *tel que*

$$\lim_{t \uparrow T} \int u_x^2(t,x)dx = +\infty.$$

(ii) De plus, il existe une suite (t_n) *telle que* $t_n \to T$ *et*

$$\sqrt{\int u_x^2(t_n,x)dx} \leq \frac{C_0}{|E_0|(T-t_n)}, \tag{31}$$

où $C_0 = 4(\int Q)^2 \|Q_x\|_{L^2}$.
(iii) Finalement, pour tout $0 \leq t < T$, *il existe* $\lambda(t) > 0$ *et* $x(t) \in \mathbb{R}$ *tels que*

$$\lambda^{1/2}(t)u(t, \lambda(t)x + x(t)) \rightharpoonup Q \quad \textit{lorsque } t \uparrow T \textit{ dans } H^1(\mathbb{R}).$$

Le point (ii) signifie qu'au moins pour une sous-suite, on connaît une majoration du taux d'explosion de la norme $\|u(t)\|_{H^1}$ lorsque $t \to T$. On conjecture que $\frac{C}{T-t}$ est le taux d'explosion exact, mais c'est un problème ouvert pour l'instant.

Le point (iii) montre que Q est un profil universel d'explosion: les solutions proches de Q qui explosent ont toutes le même profil d'explosion. C'est un résultat similaire à celui de la stabilité asymptotique des solitons.

Pour l'équation de Schrödinger nonlinéaire critique, le phénomène d'explosion est à présent mieux connu que pour KdV, voir l'exposé de recherche de Pierre Raphael sur ce sujet.

Une partie de la démonstration du résultat d'explosion repose sur des arguments très similaires à ceux utilisés pour le résultat de stabilité asymptotique du soliton dans le cas sous-critique, notamment des principes de rigidité. Ce type d'arguments permettent d'établir l'existence d'une solution qui devient infinie en norme H^1, et de décrire le profil à l'explosion. Des arguments différents sont nécessaires pour montrer que l'explosion a lieu en temps fini, ainsi que pour obtenir la majoration sur le taux d'explosion. Nous renvoyons aux articles [7], [11] et [8] pour plus de détails sur ces démonstrations.

References

[1] C.E. Kenig, G. Ponce and L. Vega, Well-posedness and scattering results for the generalized Korteweg–de Vries equation via the contraction principle, Comm. Pure Appl. Math. **46**, (1993) 527–620.
[2] C. Laurent et Y.Martel, Comm. Partial Differential Equations **28** (2003), 2093-2107.
[3] Y. Martel, Asymptotic N–soliton–like solutions of the subcritical and critical generalized Korteweg–de Vries equations, to appear in Amer. J. Math.
[4] Y. Martel, A paraître.
[5] Y. Martel and F. Merle, A Liouville theorem for the critical generalized Korteweg–de Vries equation, J. Math. Pures Appl. **79**, (2000) 339–425.
[6] Y. Martel and F. Merle, Asymptotic stability of solitons for subcritical generalized KdV equations, Arch. Ration. Mech. Anal. **157**, (2001) 219–254.

[7] Y. Martel and F. Merle, Stability of blow up profile and lower bounds for blow up rate for the critical generalized KdV equation, Ann. of Math. **155**, (2002) 235–280.
[8] Y. Martel and F. Merle, Blow up in finite time and dynamics of blow up solutions for the L^2-critical generalized KdV equation, J. Amer. Math. Soc. **15**, (2002) 617—663.
[9] Y. Martel, F. Merle and Tai-Peng Tsai, Stability and asymptotic stability in the energy space of the sum of N solitons for subcritical gKdV equations, Commun. Math. Phys. **231**, (2002) 347–373.
[10] Y. Martel and F. Merle, Asymptotic stability of solitons of the subcritical gKdV equations revisited, Nonlinearity **18**, (2005) 55–80.
[11] F. Merle, Existence of blow-up solutions in the energy space for the critical generalized KdV equation, J. Amer. Math. Soc. **14**, (2001) 555—578.
[12] R.M. Miura, The Korteweg–de Vries equation: a survey of results, SIAM Review **18**, (1976) 412–459.
[13] M.I. Weinstein, Lyapunov stability of ground states of nonlinear dispersive evolution equations, Comm. Pure Appl. Math. **39**, (1986) 51–68.

Université de Versailles-Saint-Quentin-en-Yvelines, 45, avenue des Etats-Unis, 78035 Versailles - France
E-mail address: `martel@math.uvsq.fr`