UNICITÉ DU TRANSPORT PAR UN CHAMP *BV*

Trois heures de cours, Ecole d'été, Grenoble 2005
Dynamique des équations aux dérivées partielles non linéaires

mardi 5 juillet 11:00-12:30, jeudi 7 juillet 9:00–10:30

Plan du cours

1. Introduction

1.1. Cadre général
Champs bornés, divergence bornée, champ non caractéristique. Équations de transport. Solutions faibles. L'unicité au sens eulérien. Le point de vue lagrangien.
1.2. Quelques exemples et remarques
Des champs BV sans unicité, avec unicité selon le signe de la divergence. La condition $(\operatorname{div} X)_+$ *bornée est nécéssaire. Un exemple BV avec divergence nulle. Remarques sur l'EDO en dimension 1. En dimension 2, champ hamiltonien. En dimension 3, le contre-exemple d'Aizenman-Depauw.*
1.3. La régularité BV
Décomposition du gradient.
1.4. Elimination de fermés de $(d-1)$-mesure de Hausdorff nulle
Lemme géométrique. Exemples variés.

2. Enoncés des résultats et plan de la preuve

2.1. Unicité pour des champs BV
Théorème d'Ambrosio, Théorème de Le Bris-Lions pour des régularités partielles, Résultat de N.L.
2.2. Champs leibniziens, renormalisation
La formule de Leibniz. La propriété de renormalisation. Caractère local. Vérification sur un choix de fonctions-test.
2.3. Lemme sur les solutions positives
Démonstration du lemme, basée sur la transversalité et la convexification. Pour les équations de transport, pas de convexification, mais une condition globale d'intégrabilité.
2.4. Plan de la démonstration
Le lemme 2.3.1 et la propriété de renormalisation 2.2.1, avec le lemme 1.3.1 donnent le résultat d'unicité.

3. La renormalisation pour des champs BV ou partiellement BV

3.1. Préliminaires
La méthode de preuve. Un lemme de théorie de la mesure. Variété des régularisateurs.
3.2. La partie absolument continue du gradient
Un régularisateur quelconque grâce au lemme 3.1.1
3.3. La partie singulière
Structure algébrique du gradient. Le théorème d'Alberti. Autres méthodes, liées à la trace nulle.
3.4. Les champs partiellement BV
La désintégration des mesures. Une remarque sur la divergence des champs partiellement $W^{1,1}$.

References

[Ai] M.Aizenman, *On vector fields as generators of flows: a counterexample to Nelson's conjecture*, Ann. Math. **107** (1978), 287–296.

[Al] G.Alberti, *Rank one properties for derivatives of functions with bounded varioations*, Pro. Roy. Soc. Edinburgh sect A **123** (1993), 239-274.

[Am] L.Ambrosio, *Transport equations and Cauchy problem for BV vector fields* (2003), to appear in Inventiones Mathematicae.

[AFP] L.Ambrosio, N.Fusco, D.Pallara, *Functions of bounded variations and free discontinuity problems*, Oxford Mathematical monographs preprint, 2000.

[Bo] F.Bouchut, *Renormalized solutions to the Vlasov equation with coefficients of bounded variation*, Arch. Rational Mech. Anal. **157** (2001), 75-90.

[BD] F.Bouchut, L.Desvillettes, *On two-dimensional Hamiltonian transport equations with continuous coefficients*, Diff. and Int. Eq. **14** (2001), 1015-1024.

[BJ] F.Bouchut, F.James, *One dimensional transport equations with discontinuous coefficients*, Non linear analysis **32** (1998), 891–933.

[CP] I.Capuzzo Dolcetta, B.Perthame, *On some analogy between different approaches to first-order PDE's with non smooth coefficients*, Adv.Math.Sci.Appl. **6** (1996), 689-703.

[ChL] J.-Y.Chemin, N.Lerner, *Flot de champ de vecteurs non lipschitziens et équations de Navier-Stokes*, J.Differ. Eq. **121** (1995), 314–328.

[CL1] F.Colombini, N.Lerner, *Uniqueness of continuous solutions for BV vector fields*, Duke Math.J. **111** (2002), 357–384.

[CL2] F.Colombini, N.Lerner, *Uniqueness of L^∞ solutions for a class of conormal BV vector fields,* (2003), Geometric Analysis of PDE and Several Complex Variables, (S.Chanillo, P.Cordaro, N.Hanges, J.Hounie, and A.Meziani, eds.), vol. 368, Contemp. Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, pp. 133-156.

[CLR] F.Colombini, T.Luo, J.Rauch, *Uniqueness and nonuniqueness for nonsmooth divergence free transport*, Séminaire XEDP, Ecole Polytechnique (2003-04).

[De] N.Depauw, *Non unicité des solutions bornées pour un champ de vecteurs BV en dehors d'un hyperplan.*, C.R.Math.-Acad.Sci.Paris **337** (2003), 4, 249-252.

[DL] R.J. DiPerna, P.-L.Lions, *Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces*, Invent. Math. **98** (1989), 511–547.

[Fe] H.Federer, *Geometric measure theory*, Grund. der math. Wiss., vol. 153, Springer-Verlag, 1969.

[LL] C.Le Bris, P.-L.Lions, *Renormalized solutions of some transport equations with partially $W^{1,1}$ velocities and applications*, Annali di Matematica pura ed applicata. **183** (2004), 97-130.

[Le] N.Lerner, *Transport equations with partially BV velocities*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. **(5) 3** (2004), no. 4, 681–703.

[Li] P.-L.Lions, *Sur les équations différentielles ordinaires et les équations de transport*, C.R. Acad.Sc. Paris, Série I, **326** (1998), 833–838.

[Tr] F.Treves, *Topological vector spaces, distributions and kernels*, Pure & Appl. Math.Ser., Academic Press, 1967.

[Vo] A.I.Vol'pert, *The space BV and quasi-linear equations*, Math.USSR Sbornik **2** (1967), 225–267.

[Zi] W.P.Ziemer, *Weakly differentiable functions*, Graduate texts in mathematics, vol. 120, Springer-Verlag, 1989.

Université de Rennes 1, Irmar, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes cedex, France

E-mail address: `nicolas.lerner@univ-rennes1.fr`

Web-page: `http://www.perso.univ-rennes1.fr/nicolas.lerner/`