

Ondes progressives dans les systèmes de réaction-diffusion

Ce cours est une *introduction* à l'étude des ondes progressives dans les systèmes de réaction-diffusion. Après une présentation générale de ces systèmes et de quelques-unes de leurs propriétés importantes, on traite en détail dans le chapitre 2 le cas de l'équation scalaire à une dimension, pour laquelle on présente les principaux résultats d'existence et de stabilité d'ondes progressives. On évoque pour terminer quelques généralisations possibles, dont certaines seront discutées plus en détail dans d'autres cours de cette école. Les résultats présentés ci-dessous ne sont évidemment pas originaux, et la bibliographie n'est de loin pas exhaustive.

1. Systèmes de réaction-diffusion

De façon générale, on appelle *système de réaction-diffusion* une équation aux dérivées partielles parabolique semi-linéaire de la forme

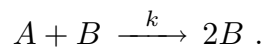
$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(x, t) = D\Delta \mathbf{u}(x, t) + \mathbf{f}(\mathbf{u}(x, t)) , \quad x \in \Omega , \quad t \geq 0 , \quad (1.1)$$

où $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m) : \Omega \times \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}^m$, $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_m)$ est une matrice diagonale définie positive, et $\mathbf{f} : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^m$ est une application régulière (au moins localement lipschitzienne). L'équation (1.1) est posée sur un domaine ouvert $\Omega \subset \mathbf{R}^d$, et complétée par des conditions sur le bord, par exemple les conditions de Dirichlet homogènes ($\mathbf{u} = 0$ sur $\partial\Omega$) ou les conditions de Neumann homogènes ($\partial \mathbf{u} / \partial n = 0$ sur $\partial\Omega$).

Des systèmes de la forme (1.1) apparaissent naturellement dans de nombreuses situations. Voici quelques exemples :

Modélisation des réactions chimiques [BiN]

On considère une réaction chimique isotherme autocatalytique de la forme



On note $a(x, t), b(x, t)$ les concentrations des substances A, B au point x et à l'instant t . Ces quantités sont solution du système

$$\frac{\partial a}{\partial t} = D_A \Delta a - kab , \quad \frac{\partial b}{\partial t} = D_B \Delta b + kab ,$$

où D_A, D_B sont les constantes de diffusion des substances A, B dans la solution, et $k > 0$ est le taux de réaction. Après adimensionnement, on se ramène au système

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \Delta a - ab , \quad \frac{\partial b}{\partial t} = D \Delta b + ab , \quad (1.2)$$

où $D = D_B/D_A$ est le rapport des constantes de diffusion. Si $D = 1$, alors la somme $a + b$ est solution de l'équation de la chaleur : $\partial_t(a + b) = \Delta(a + b)$. Si en outre les données initiales sont telles que $a(x, 0) + b(x, 0) = 1$ pour tout $x \in \Omega$, alors (pour les conditions au bord de Neumann, par exemple) la solution vérifie $a(x, t) + b(x, t) = 1$ pour tout $x \in \Omega$ et tout $t \geq 0$, de sorte que le système (1.2) se réduit à l'équation scalaire

$$\frac{\partial b}{\partial t} = \Delta b + b(1 - b) , \quad (1.3)$$

appelée équation de Fisher [Fis] ou équation de Kolmogorov-Petrovsky-Piskunov [KPP].

Modèles en dynamique des populations [AW1], [AW2], [Mu]

On considère une population d'individus "diploïdes", c'est-à-dire chez qui l'information génétique est dédoublée. On suppose qu'un certain gène sur une certaine paire de chromosomes se présente sous deux formes possibles, ou *allèles*, que l'on notera a et A . La population se subdivise alors en individus "homozygotes" de type aa ou AA , et "hétérozygotes" de type aA . Notons $\rho_1(x, t)$, $\rho_2(x, t)$, $\rho_3(x, t)$ la densité d'individus de type aa , aA , AA respectivement, au point x et à l'instant t . Supposons que les individus constituant la population se reproduisent avec un taux r (indépendant du génotype), et se déplacent aléatoirement dans l'espace suivant un mouvement brownien de constante D (également indépendante du génotype). On suppose en revanche que les taux de décès τ_1, τ_2, τ_3 des trois populations peuvent légèrement différer. Alors les densités ρ_1, ρ_2, ρ_3 sont solution du système

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} &= D\Delta\rho_1 - \tau_1\rho_1 + \frac{r}{\rho}(\rho_1 + \frac{1}{2}\rho_2)^2 , \\ \frac{\partial \rho_2}{\partial t} &= D\Delta\rho_2 - \tau_1\rho_2 + \frac{2r}{\rho}(\rho_1 + \frac{1}{2}\rho_2)(\rho_3 + \frac{1}{2}\rho_2) , \\ \frac{\partial \rho_3}{\partial t} &= D\Delta\rho_3 - \tau_3\rho_3 + \frac{r}{\rho}(\rho_3 + \frac{1}{2}\rho_2)^2 , \end{aligned}$$

où $\rho = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3$. On remarque que, si $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau$, alors $\partial_t\rho = \Delta\rho + (r - \tau)\rho$.

Si les taux de décès τ_1, τ_2, τ_3 sont proches, on peut montrer (sous certaines conditions, cf. [AW1]) que la densité relative de l'allèle A dans la population totale :

$$u = \frac{\rho_3 + \frac{1}{2}\rho_2}{\rho_1 + \rho_2 + \rho_3}$$

vérifie approximativement l'équation de Fisher-KPP à non-linéarité cubique :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u + u(1 - u) \left((\tau_1 - \tau_2)(1 - u) - (\tau_3 - \tau_2)u \right) .$$

Modélisation de la combustion [BeL]

On décrit la combustion d'un mélange gazeux par une réaction chimique exothermique de la forme $R \rightarrow P$, où R est le *réactant* (mélange gazeux) et P le *produit* de la réaction (substance inerte). On note $Y(x, t)$ la densité de réactant au point x à l'instant t ,

et $T(x, t)$ la température du mélange. Alors sous différentes approximations (densité constante, convection négligeable, ...) on obtient le système *thermo-diffusif*

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \Delta T + YF(T), \quad \frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\kappa}{\text{Le}} \Delta Y - YF(T),$$

où le nombre de Lewis Le est le rapport des constantes de diffusion. La non-linéarité F est de type ‘‘Arrhénius’’ :

$$F(T) = P(T) \exp\left(-\frac{E}{RT}\right),$$

où P est un polynôme en T , R est la constante des gaz parfaits, et E est une énergie d’activation. A nouveau, si $\text{Le} = 1$ et si $T + Y \equiv 1$, on est ramené à l’équation scalaire

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \Delta T + (1 - T)F(T).$$

La fonction $f(T) = F(T)(1 - T)$ s’annulant très vite lorsque $T \rightarrow 0$, on l’approche souvent par une fonction identiquement nulle sur un petit intervalle $[0, \theta]$, où $\theta > 0$ est la ‘‘température d’ignition’’.

L’équation (1.1) n’est évidemment pas la forme la plus générale que puisse prendre un système de réaction-diffusion. Par exemple, le terme de réaction peut dépendre explicitement de la variable d’espace (milieu inhomogène) ou du temps (forçage extérieur). De même, le coefficient de diffusion peut dépendre de x (milieu inhomogène) ou même de la solution \mathbf{u} , auquel cas l’équation (1.1) devient quasi-linéaire (milieu poreux). Enfin, le terme de réaction peut également dépendre des dérivées premières de \mathbf{u} . Un exemple important est le système de *réaction-diffusion-convection*

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(x, t) + (\mathbf{v}(x, t) \cdot \nabla) \mathbf{u}(x, t) = D \Delta \mathbf{u}(x, t) + \mathbf{f}(\mathbf{u}(x, t)),$$

où $\mathbf{v}(x, t)$ est par exemple la vitesse du mélange gazeux dans le cas de la combustion. Cette vitesse est soit imposée, soit solution d’une équation de type Navier-Stokes couplée à \mathbf{u} (on sort là du cadre strict des systèmes de réaction-diffusion).

Le problème de Cauchy pour l’équation (1.1) n’est pas très difficile à résoudre, surtout si (comme la modélisation le suggère) on cherche des solutions dans des espaces de fonctions régulières. Si le domaine Ω est borné, un bon choix est $X = C^0(\bar{\Omega})$, l’espace des fonctions continues jusqu’au bord. Dans le cas non borné, on pourra prendre $X = C_{\text{bu}}(\Omega)$, l’espace des fonctions bornées et uniformément continues sur Ω . Des arguments généraux [CaH], [He] montrent alors que, pour toute donnée initiale $\mathbf{u}_0 \in X^m$, le système (1.1) possède une solution unique $\mathbf{u} \in C^0(I, X^m)$ définie sur un intervalle de temps maximal $I = [0, T^*(\mathbf{u}_0)]$. Il est plus difficile de déterminer si toutes les solutions sont globales, c’est-à-dire si $T^*(\mathbf{u}_0) = +\infty$ pour tout $\mathbf{u}_0 \in X^m$. Ceci dépend en effet des détails de la non-linéarité \mathbf{f} (conditions de croissance à l’infini et de signe). A cet égard, il est naturel de comparer (1.1) avec le système d’équations différentielles ordinaires

$$\mathbf{u}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{u}(t)). \tag{1.4}$$

Si l'on a choisi les conditions au bord de Neumann homogènes, les solutions de (1.4) sont évidemment aussi des solutions de (1.1). Il est donc nécessaire de demander que toutes les solutions de (1.4) soient globales, mais *ce n'est pas suffisant*, sauf dans le cas scalaire $m = 1$ ou plus généralement lorsque le système (1.1) est monotone [MP]. Même lorsque $m = 2$ et $d_1 = d_2$, il existe des exemples de non-linéarités telles que toutes les solutions de (1.4) soient globales, mais pour lesquelles certaines solutions de (1.1) explosent en temps fini [We]. Ce phénomène n'est pas lié à l'instabilité de Turing, laquelle ne se produit pas dans le cas équi-diffusif.

Souvent, l'origine physique du système que l'on étudie impose de se restreindre aux solutions positives: $u_i(x, t) \geq 0$ pour tout $x \in \Omega$, tout $t \geq 0$ et tout $i = 1, \dots, m$. Le cône $C = \{\mathbf{u} \mid u_i = 0 \forall i\}$ est invariant sous l'évolution de (1.1) si la non-linéarité \mathbf{f} vérifie, pour tout $i = 1, \dots, m$:

$$f_i(\mathbf{u}) \geq 0 \quad \text{pour tout } \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m) \in C \quad \text{avec } u_i = 0 .$$

Ceci résulte du principe du maximum parabolique [PW].

Supposons à présent que toutes les solutions de (1.1) existent globalement. La question fondamentale est de décrire la *dynamique* du système (1.1), c'est-à-dire le comportement de ces solutions, en particulier dans la limite $t \rightarrow +\infty$. Il est clair qu'on ne peut pas espérer dire grand-chose en toute généralité, ne serait-ce que parce que (1.1) est une extension de (1.4)! En fait, même si le nombre m de composantes est petit, des *théorèmes de réalisation* montrent que le système (1.1) possède une dynamique arbitrairement compliquée pour certaines non-linéarités \mathbf{f} [Po]. Par exemple, si B est un ouvert borné de \mathbf{R}^N (avec N arbitrairement grand), il existe un sous-ensemble ouvert dense $E \subset C^1(\bar{B}, \mathbf{R}^N)$ tel que, pour tout $\mathbf{h} \in E$, le système $\mathbf{u}' = \mathbf{h}(\mathbf{u})$ peut être "réalisé" dans l'équation scalaire

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \Delta u + f_1(x, u) + f_2(x, u) \cdot \nabla u, & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ u &= 0, & x \in \partial\Omega, \quad t > 0. \end{aligned} \tag{1.5}$$

(Ici, Ω est n'importe quel ouvert borné de \mathbf{R}^d avec $d \geq 2$.) Ceci veut dire qu'il existe (dans un certain espace fonctionnel X) une sous-variété difféomorphe à B , localement invariante sous l'évolution de (1.5), et sur laquelle les trajectoires de (1.5) sont les images des trajectoires de l'équation différentielle $\mathbf{u}' = \mathbf{h}(\mathbf{u})$ (à une reparamétrisation du temps près). En particulier, on peut ainsi "réaliser" dans l'équation scalaire (1.5) toute dynamique hyperbolique *robuste* de dimension finie. Si l'on veut que f_1, f_2 dans (1.5) soient indépendants de x , il faut choisir le domaine Ω en fonction de $\mathbf{h} \in E$. Si l'on ne veut pas de dépendance en ∇u , il faut remplacer (1.5) par un système à deux composantes [Va].

Il existe tout de même deux grandes classes de systèmes pour lesquelles on peut dire des choses en toute généralité sur le comportement des solutions :

1. Systèmes gradients (ou de type gradient)

Supposons que

$$\frac{\partial f_i}{\partial u_j} = \frac{\partial f_j}{\partial u_i} \quad \text{pour tout } i, j \in \{1, \dots, m\} .$$

(C'est toujours le cas si $m = 1$.) Alors il existe $V : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$ tel que $\mathbf{f} = -\nabla V$. Dans ce cas, le système (1.1) possède une *fonction de Lyapunov*:

$$E = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m |\nabla u_i|^2 + V(\mathbf{u}) \right) dx ,$$

$$\frac{dE}{dt} = - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^m \left| \frac{du_i}{dt} \right|^2 dx \leq 0 .$$

Si Ω est borné, l'existence de cette fonction de Lyapunov contraint beaucoup les trajectoires du système: toute solution qui reste uniformément bornée dans X pour tout $t \geq 0$ est nécessairement relativement compacte (par régularisation parabolique), donc (par le principe de LaSalle) converge vers *l'ensemble des points d'équilibre* lorsque $t \rightarrow +\infty$.

Remarque. Ceci n'implique pas que cette solution converge vers *un* point d'équilibre! Pour garantir la convergence, il faut des hypothèses supplémentaires. C'est le cas si l'ensemble des points d'équilibre est discret, ou si la variété centrale de chaque point d'équilibre est de dimension au plus un [HaR]. C'est également le cas si f est analytique réelle, ou si on suppose que E satisfait à une inégalité de Lojasiewicz en tout point d'équilibre [HJ]. Enfin, dans le cas scalaire en dimension un ($m = d = 1$), on peut montrer que les trajectoires bornées sont convergentes en utilisant une autre fonction de Lyapunov (discrète): le nombre de zéros de la solution [Ze], [Ma].

Si Ω est non borné, la fonction de Lyapunov ci-dessus ne garantit pas la convergence vers l'ensemble des points d'équilibre, mais a tout de même des conséquences importantes sur la dynamique du système [GS], au moins si $d = 1$ ou $d = 2$.

2. Systèmes monotones

On suppose cette fois que

$$\frac{\partial f_i}{\partial u_j} \geq 0 \quad \text{pour tout } i, j \in \{1, \dots, m\} \text{ avec } i \neq j .$$

(Encore une fois, c'est automatique si $m = 1$.) Dans ce cas, si deux solutions $\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t)$ de (1.1) vérifient à un certain instant $u_i(x, t) \geq v_i(x, t)$ pour tout $x \in \Omega$ et tout $i \in \{1, \dots, m\}$, alors le principe du maximum implique que cette propriété est préservée pour tous les temps ultérieurs. En dimension finie, de tels systèmes s'appellent "systèmes coopératifs" [Hi], [Sm].

A nouveau, si Ω est borné, la structure monotone impose de sévères restrictions sur les trajectoires *typiques* du système (mais pas sur toutes!). Par exemple, si $D \subset X$ est un ensemble ouvert de données initiales pour lequel toutes les solutions sont globales et uniformément bornées, alors il existe un sous-ensemble *ouvert dense* de D pour lequel toutes les trajectoires convergent vers l'ensemble des points d'équilibre lorsque $t \rightarrow +\infty$. Mais il peut y avoir des îlots de codimension finie où n'importe quelle dynamique peut être "réalisée", cf. la discussion ci-dessus.

On a vu dans les paragraphes précédents, au moins sur des exemples, que les points d'équilibre jouent un grand rôle dans la dynamique des systèmes de réaction-diffusion définis sur des domaines *bornés*. Ce n'est plus nécessairement le cas pour des systèmes

“étendus”, où Ω est non borné (par exemple, $\Omega = \mathbf{R}^d$). A titre d’illustration considérons le système (1.2) sur \mathbf{R} avec la conditions initiale

$$a(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ 1 & \text{si } x > 0, \end{cases} \quad b(x, 0) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0, \\ 0 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Dans ce cas, les expériences numériques montrent que la solution de (1.2) converge vers une *onde progressive* de la forme

$$a(x, t) = A(x - ct), \quad b(x, t) = B(x - ct),$$

où $c > 0$, A est une fonction croissante vérifiant $A(-\infty) = 0$, $A(+\infty) = 1$, et B est une fonction décroissante vérifiant $B(-\infty) = 1$, $B(+\infty) = 0$. Ceci se produit pour n’importe quelle valeur de $D > 0$, en particulier pour $D = 1$ auquel cas le résultat peut être démontré rigoureusement en étudiant l’équation scalaire (1.3). Noter que (1.3) obéit au principe du maximum et possède une structure gradient.

Le système (1.1) est *invariant par translation* dans la variable d’espace. Si on le considère sur un domaine lui-même invariant par translation, les ondes progressives “prennent le relai” des points d’équilibre dans la description du comportement asymptotique en temps des solutions. Les points d’équilibre sont les ondes progressives de vitesse nulle, et la vitesse $c = 0$ ne joue en général pas de rôle particulier.

Lorsqu’on étudie (1.1) sur un domaine non borné, il est important de prescrire le *comportement à l’infini* (en espace) des solutions. Cela se fait par le biais des données initiales. Dans toute la suite, on ne considérera que le cas simple (mais très naturel) où $\mathbf{u}(x, t)$ converge lorsque $|x| \rightarrow \infty$ (dans Ω) vers un point d’équilibre $\bar{\mathbf{u}} \in \mathbf{R}^m$, où $\mathbf{f}(\bar{\mathbf{u}}) = 0$. Dans le cas où le bord $\partial\Omega$ a “deux composantes connexes à l’infini” (par exemple si $\Omega = \mathbf{R}$ ou si Ω est un domaine cylindrique), on pourra considérer deux points d’équilibre distincts $\bar{\mathbf{u}}_1, \bar{\mathbf{u}}_2$.

2. Ondes progressives pour l’équation scalaire 1D

Dans ce chapitre, on considère exclusivement l’équation scalaire à une dimension

$$\partial_t u(x, t) = \partial_x^2 u(x, t) + f(u(x, t)), \quad x \in \mathbf{R}, \quad t \geq 0, \quad (2.1)$$

où $u(x, t) \in \mathbf{R}$. On suppose toujours que $f \in C^1([0, 1], \mathbf{R})$ vérifie $f(0) = f(1) = 0$, et on étudie essentiellement les trois cas suivants :

- a) *Non-linéarité monostable* : $f(u) > 0$ pour tout $u \in]0, 1[$. Dans ce cas, on a souvent $f'(0) > 0$ et $f'(1) < 0$.
- b) *Non-linéarité bistable* : il existe $a \in]0, 1[$ tel que $f(u) < 0$ pour $u \in]0, a[$ et $f(u) > 0$ pour $u \in]a, 1[$. Dans ce cas, on a souvent $f'(0) < 0$ et $f'(1) < 0$.
- c) *Non-linéarité de type combustion* : il existe $a \in]0, 1[$ tel que $f(u) = 0$ pour $u \in]0, a[$ et $f(u) > 0$ pour $u \in]a, 1[$.

Les termes “monostable” et “bistable” se réfèrent à la stabilité des points d’équilibre $u = 0$ et $u = 1$ pour l’équation différentielle ordinaire $u' = f(u)$.

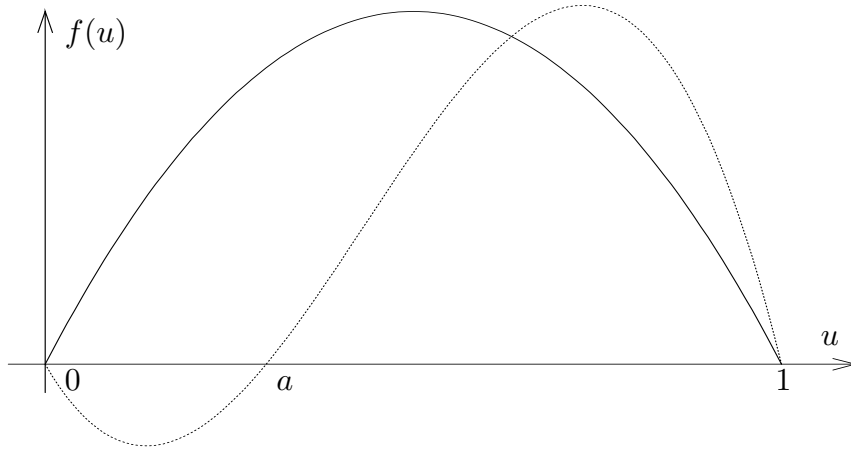


Fig. 1: La non-linéarité $f(u)$ dans le cas monostable (trait plein) et bistable (trait pointillé).

On cherche des solutions de (2.1) sous forme *d'ondes progressives* (ou *fronts*) en translation uniforme, reliant l'état d'équilibre $u = 1$ (à $-\infty$) à l'état d'équilibre $u = 0$ (à $+\infty$). On pose donc

$$u(x, t) = h(x - ct) , \quad x \in \mathbf{R} , \quad t \in \mathbf{R} ,$$

où $c \in \mathbf{R}$ est la *vitesse du front* (à déterminer). En notant $y = x - ct$ la variable d'espace dans le référentiel de l'onde progressive, on obtient pour le *profil* $h(y)$ l'équation elliptique non linéaire

$$\begin{cases} h''(y) + ch'(y) + f(h(y)) = 0 , & y \in \mathbf{R} , \\ h(-\infty) = 1 , \quad h(+\infty) = 0 . \end{cases} \quad (2.2)$$

Le problème consiste donc à trouver $c \in \mathbf{R}$ et $h : \mathbf{R} \rightarrow [0, 1]$ de classe C^2 tel que (2.2) soit vérifié.

Remarques.

1) Si h est solution de (2.2) pour un certain c , alors $y \mapsto h(y + y_0)$ est également solution de (2.2) pour le même c , quel que soit $y_0 \in \mathbf{R}$. Ceci résulte de l'invariance par translation de l'équation (2.1).

2) Contrairement à ce qui se passe pour l'équation conservative $\partial_t u + \partial_x f(u) = \partial_x^2 u$, il n'y a pas de condition simple (de type Rankine-Hugoniot) qui permette de déterminer a priori la vitesse c du front.

2.1. Existence des ondes progressives dans le cas monostable

Le résultat fondamental de cette section est le théorème classique suivant, dont la démonstration se trouve en particulier dans les articles de Aronson et Weinberger [AW1], [AW2].

Théorème 2.1. *On suppose que $f \in C^1([0, 1])$ vérifie $f(0) = f(1) = 0$ et $f(u) > 0$ pour tout $u \in]0, 1[$. Il existe une vitesse critique $c_* > 0$ vérifiant $c_*^2 \geq 4f'(0)$ telle que :*

- i) *Pour tout $c \geq c_*$, l'équation (2.2) possède une solution $h_c : \mathbf{R} \rightarrow]0, 1[$ de classe C^3 . Cette solution est unique aux translations près, et vérifie $h'_c(y) < 0$ pour tout $y \in \mathbf{R}$.*
- ii) *Pour $c < c_*$, l'équation (2.2) ne possède pas de solution $h : \mathbf{R} \rightarrow [0, 1]$.*

L'ensemble des vitesses admissibles est donc la demi-droite $[c_*, +\infty[$.

La démonstration du théorème 2.1 repose sur une idée simple mais très importante, qui figure dans la littérature sous le nom de “dynamique spatiale” : on regarde le problème elliptique non linéaire (2.2) comme un *problème d'évolution* dans la variable spatiale $y = x - ct$, qui est donc interprétée comme un “temps”. En notant

$$F(u) = \int_0^u f(s) ds, \quad u \in [0, 1],$$

l'équation d'évolution prend la forme

$$h''(y) + ch'(y) + F'(h(y)) = 0, \quad y \in \mathbf{R}. \quad (2.3)$$

On reconnaît l'équation du mouvement d'une particule de masse unité se déplaçant sur la droite \mathbf{R} sous l'action de deux forces : une force de frottement visqueux $-ch'$, et la force dérivant du potentiel $F(h)$. En particulier, si $c > 0$, l'énergie $E = \frac{1}{2}(h')^2 + F(h)$ décroît au cours du “temps” :

$$E' = h'(h'' + F'(h)) = -c(h')^2 \leq 0.$$

Rappelons qu'on cherche une trajectoire *hétérocline* de (2.3) reliant le point d'équilibre $(h, h') = (1, 0)$ (à $-\infty$) au point d'équilibre $(h, h') = (0, 0)$ (à $+\infty$). Comme $F(1) = \int_0^1 f(u) du > F(0) = 0$, une telle trajectoire ne peut exister que si $c > 0$.

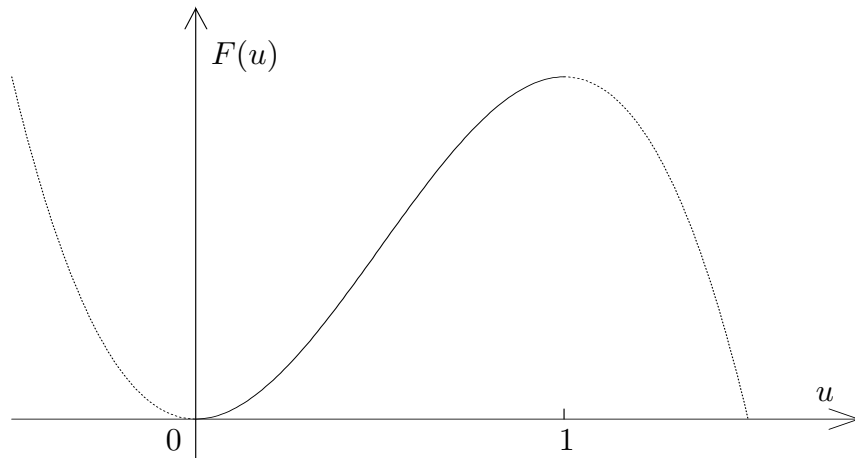


Fig. 2: Le potentiel $F(u)$ dans le cas monostable.

D'autre part, si $h(y)$ est une solution de (2.2) pour un certain $c > 0$, on a $h(y) \rightarrow 0$ lorsque $y \rightarrow +\infty$, et donc $h''(y) + ch'(y) + f'(0)h(y) \approx 0$ lorsque y est suffisamment grand. On en déduit [E] que

$$h(y) \approx A_+ e^{-\lambda_+(c)y} + A_- e^{-\lambda_-(c)y}, \quad y \rightarrow +\infty,$$

où $A_+, A_- \in \mathbf{R}$ et

$$\lambda_{\pm}(c) = \frac{1}{2} \left(c \pm \sqrt{c^2 - 4f'(0)} \right). \quad (2.4)$$

Comme $h(y)$ ne change pas de signe, on a forcément $c \geq 2\sqrt{f'(0)}$: c'est la condition d'amortissement fort pour l'oscillateur harmonique $h'' + ch' + f'(0)h = 0$.

Etant donné que le point d'équilibre $(h, h') = (1, 0)$ est instable, il existe une solution unique de (2.3) (aux translations près) telle que $h(y) < 1$ pour tout $y \in \mathbf{R}$ et $h(y) \rightarrow 1$ lorsque $y \rightarrow -\infty$. Cette solution forme ce que l'on appelle la *variété instable* du point d'équilibre $(h, h') = (1, 0)$. Il est "intuitivement clair" que cette solution est monotone (décroissante) si $c > 0$ est suffisamment grand, et que si elle est monotone pour une valeur de c elle l'est a fortiori pour les valeurs supérieures de la vitesse. C'est exactement ce qu'affirme le théorème 2.1.

Définition. On dit que le front de vitesse minimale c_* est

- *linéaire* (ou "pulled") si $c_* = 2\sqrt{f'(0)}$,
- *non linéaire* (ou "pushed") si $c_* > 2\sqrt{f'(0)}$.

On verra ci-dessous, sur un exemple, que les deux situations peuvent effectivement se produire.

Démonstration du théorème 2.1 dans le cas concave. Supposons, pour simplifier, que f est concave sur l'intervalle $[0, 1]$. Il s'ensuit en particulier que $f'(0) > 0$, $f'(1) < 0$, et $f'(1) \leq f'(u) \leq f'(0)$ pour tout $u \in [0, 1]$. Fixons également $c \geq 2\sqrt{f'(0)}$. Pour étudier l'équation différentielle du second ordre (2.2), on commence par l'écrire sous la forme d'un système du premier ordre (méthode du "plan de phase"). En posant $q = h$, $p = h'$, on trouve

$$q' = p, \quad p' = -cp - f(q). \quad (2.5)$$

On cherche une trajectoire hétérocline de (2.5) reliant le point d'équilibre $(q, p) = (1, 0)$ (point selle) au point d'équilibre $(q, p) = (0, 0)$ (noeud stable).

Notons

$$\alpha = \frac{1}{2f'(1)} \left(c - \sqrt{c^2 - 4f'(1)} \right) = \frac{2}{c + \sqrt{c^2 - 4f'(1)}},$$

$$\beta = \frac{1}{2f'(0)} \left(c - \sqrt{c^2 - 4f'(0)} \right) = \frac{2}{c + \sqrt{c^2 - 4f'(0)}}.$$

Il est clair que $\beta > \alpha > 0$. Etant donné $\tilde{\alpha} \in]0, \alpha[$, on définit la région ouverte de \mathbf{R}^2 :

$$D = \left\{ (q, p) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 < q < 1, -\beta f(q) < p < -\tilde{\alpha} f(q) \right\}.$$

Alors :

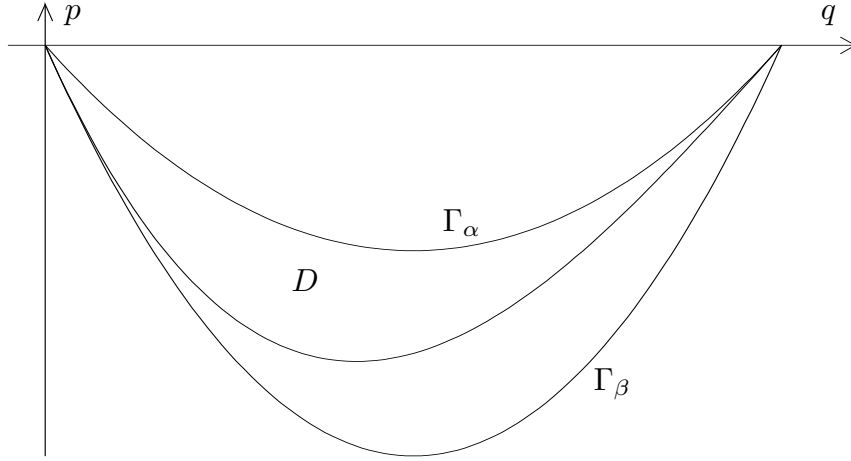


Fig. 3: La région invariante D du plan de phase contenant la trajectoire hétérocline.

i) D est *positivement invariante* sous le flot de (2.5). En d'autres termes, si (q, p) est une solution de (2.5) avec $(q(0), p(0)) \in D$, alors $(q(y), p(y)) \in D$ pour tout $y \geq 0$. En effet, une solution de (2.5) ne peut pas quitter D qu'en traversant une des deux courbes $\Gamma_\alpha = \{(q, -\tilde{\alpha}f(q)) \mid 0 < q < 1\}$ ou $\Gamma_\beta = \{(q, -\beta f(q)) \mid 0 < q < 1\}$. Or, si $(q, p) \in \Gamma_\alpha$, on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy}(p + \tilde{\alpha}f(q)) &= -cp - f(q) + \tilde{\alpha}f'(q)p = f(q)(c\tilde{\alpha} - 1 - \tilde{\alpha}^2 f'(q)) \\ &\leq f(q)(c\tilde{\alpha} - 1 - \tilde{\alpha}^2 f'(1)) < f(q)(c\alpha - 1 - \alpha^2 f'(1)) = 0, \end{aligned}$$

donc on ne peut pas quitter la région D en traversant la courbe Γ_α . De même, si $\Lambda = p + \beta f(q)$, alors pour $0 < q < 1$ et $p < 0$ on a

$$\begin{aligned} \frac{d\Lambda}{dy} &= -cp - f(q) + \beta f'(q)p = -cp + \frac{1}{\beta}(p - \Lambda) + \beta f'(q)p \\ &= -\frac{\Lambda}{\beta} + \frac{p}{\beta}(-c\beta + 1 + \beta^2 f'(q)) \geq -\frac{\Lambda}{\beta} + \frac{p}{\beta}(-c\beta + 1 + \beta^2 f'(0)) = -\frac{\Lambda}{\beta}, \end{aligned}$$

ce qui implique que $\Lambda(y) \geq e^{-y/\beta}\Lambda(0)$ pour $y \geq 0$. Il est donc également impossible de quitter la région D en traversant la courbe $\Gamma_\beta = \{(q, p) \mid 0 < q < 1, \Lambda = 0\}$.

ii) La *variété instable* du point d'équilibre $(q, p) = (1, 0)$ pénètre dans la région D . En effet, l'opérateur linéarisé en ce point

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -f'(1) & -c \end{pmatrix}$$

possède les valeurs propres $\mu_\pm = \frac{1}{2}(-c \pm \sqrt{c^2 - 4f'(1)})$, de sorte que $\mu_- < 0 < \mu_+$. Les vecteurs propres correspondants sont $(1, \mu_\pm)$. Ainsi la variété instable, de dimension un, est tangente au vecteur $(1, \mu_+)$ au point $(1, 0)$. Sa pente vaut donc $\mu_+ \equiv |f'(1)|\alpha$. D'autre part, en ce même point, les pentes des courbes Γ_α et Γ_β sont $\tilde{\alpha}|f'(1)|$ et $\beta|f'(1)|$ respectivement. Comme $\tilde{\alpha} < \alpha < \beta$, la branche de la variété instable du point $(1, 0)$ qui pénètre dans le demi-plan $\{(q, p) \mid p < 0\}$ est donc contenue dans la région D au voisinage de $(1, 0)$.

Il est maintenant facile de conclure la démonstration. Posons $c_* = 2\sqrt{f'(0)}$. Si $c \geq c_*$, on a montré qu'il existe une solution $(q(y), p(y))$ de (2.5) qui converge vers $(1, 0)$ lorsque $y \rightarrow -\infty$ et qui est contenue dans D pour y suffisamment négatif. Par i), on sait que $(q(y), p(y)) \in D$ pour tout $y \in \mathbf{R}$, et on en déduit aisément que $(q(y), p(y))$ converge vers $(0, 0)$ lorsque $y \rightarrow +\infty$. On a donc construit une trajectoire hétérocline reliant $(1, 0)$ à $(0, 0)$ et vérifiant

$$-\beta f(q(y)) \leq p(y) \leq -\alpha f(q(y)), \quad y \in \mathbf{R}, \quad (2.6)$$

car $\tilde{\alpha} < \alpha$ était arbitraire. Cette solution est unique aux translations près, car la variété instable de $(1, 0)$ est de dimension un. \square

Remarques.

1) Les bornes (2.6) sont "optimales". En effet, on a vu que la trajectoire hétérocline est tangente à la courbe Γ_α au point $(1, 0)$. D'autre part, un argument similaire montre que cette trajectoire est également tangente à la courbe Γ_β au point $(0, 0)$.

2) On a montré que $c_* = 2\sqrt{f'(0)}$ si f est concave. En fait, on verra plus tard que l'on a toujours

$$4f'(0) \leq c_*^2 \leq 4\sigma, \quad \text{où } \sigma = \sup \left\{ \frac{f(u)}{u} \mid 0 < u < 1 \right\}. \quad (2.7)$$

Il n'y a donc pas de front "non linéaire" si $\sigma = f'(0)$, c'est-à-dire si le graphe de f reste au-dessous de sa tangente à l'origine.

Pour étudier la stabilité des fronts monostables, on a besoin d'informations précises sur leur comportement lorsque $y \rightarrow +\infty$. On sait déjà que

$$h_c(y) \approx \begin{cases} A_- e^{-\lambda_-(c)y} + A_+ e^{-\lambda_+(c)y} & \text{si } c > 2\sqrt{f'(0)}, \\ (Ay + B)e^{-cy/2} & \text{si } c = 2\sqrt{f'(0)}, \end{cases}$$

où $\lambda_\pm = \frac{1}{2}(c \pm \sqrt{c^2 - 4f'(0)})$. La démonstration du théorème 2.1 donne les renseignements supplémentaires suivants :

Théorème 2.2. *La solution h_c de (2.2) donnée par le théorème 2.1 vérifie, lorsque $y \rightarrow +\infty$:*

- 1) Si $c > c_*$: $h_c(y) = A_- e^{-\lambda_-(c)y} + o(e^{-\lambda_-(c)y})$, où $A_- > 0$.
- 2) Si $c = c_* > 2\sqrt{f'(0)}$: $h_c(y) = A_+ e^{-\lambda_+(c)y} + o(e^{-\lambda_+(c)y})$, où $A_+ > 0$.
- 3) Si $c = c_* = 2\sqrt{f'(0)}$ et $f(u) \leq f'(0)u$: $h_c(y) = (Ay + B)e^{-cy/2} + o(e^{-cy/2})$, où $A > 0, B \in \mathbf{R}$.

Commentaires.

- 1) Le front de vitesse *non critique* ($c > c_*$) décroît toujours "aussi lentement que possible". Pour f concave, cela suit de la démonstration ci-dessus, car $\beta f'(0) = \lambda_-$.
- 2) Le front *critique non linéaire* (pushed) décroît toujours "aussi vite que possible".
- 3) Le front *critique linéaire* (pulled) peut décroître plus ou moins vite, en fonction de la non-linéarité. Si le graphe de f reste au-dessous de sa tangente à l'origine, on a toujours une décroissance "lente".

Une question fondamentale pour la suite est de déterminer, en fonction de la non-linéarité f , si le front de vitesse minimale est linéaire ($c_* = 2\sqrt{f'(0)}$) ou non linéaire ($c_* > 2\sqrt{f'(0)}$). A cette fin, les caractérisations variationnelles ci-dessous sont utiles.

Principe variationnel de Hadeler et Rothe [HR]

On suppose que $f \in C^1([0, 1])$, $f(0) = f(1) = 0$, $f'(0) > 0$, $f'(1) < 0$, et $f(u) > 0$ pour tout $u \in]0, 1[$. Alors

$$c_* = \inf_{g \in X} \sup_{0 < u < 1} \left(g'(u) + \frac{f(u)}{g(u)} \right), \quad (2.8)$$

où $X = \{g \in C^1([0, 1]) \mid g(0) = 0, g'(0) > 0, g(u) > 0 \forall u \in]0, 1[\}$.

Cette caractérisation permet d'obtenir des *bornes supérieures* sur c_* par des choix appropriés de la fonction $g \in X$.

Commentaires.

1) Pour tout $g \in X$, on a

$$\sup_{0 < u < 1} \left(g'(u) + \frac{f(u)}{g(u)} \right) \geq g'(0) + \frac{f'(0)}{g'(0)} \geq 2\sqrt{f'(0)},$$

donc le membre de droite de (2.8) est toujours plus grand ou égal à $2\sqrt{f'(0)}$.

2) Si $g(u) = \sqrt{\sigma}u$ où σ est comme dans (2.7), alors

$$g'(u) + \frac{f(u)}{g(u)} \leq \sqrt{\sigma} + \frac{\sigma u}{\sqrt{\sigma}u} = 2\sqrt{\sigma}, \quad \text{pour tout } u \in]0, 1[,$$

donc $c_* \leq 2\sqrt{\sigma}$.

3) L'infimum dans (2.8) est réalisé par la fonction $g(q) = -p(q)$, où $p(q)$ est la trajectoire dans le plan de phase correspondant à la vitesse critique c_* . En effet, cette trajectoire vérifie $dp/dq = -c_* - f(q)/p$, donc on a $g'(q) + f(q)/g(q) = c_*$ pour tout $q \in]0, 1[$.

Principe variationnel de Benguria et Depassier [BD1], [BD2].

On suppose seulement que $f \in C^1([0, 1])$, $f(0) = f(1) = 0$, et $f(u) > 0$ pour tout $u \in]0, 1[$. Alors

$$c_*^2 = \sup_{g \in Y} \left(\frac{2 \int_0^1 fg \, du}{\int_0^1 (-g^2/g') \, du} \right), \quad (2.9)$$

où $Y = \{g \in C^1(]0, 1[) \mid g(u) > 0 \text{ et } g'(u) < 0 \forall u \in]0, 1[; \int_0^1 u^2 g'(u) \, du > -\infty \}$.

Cette caractérisation permet d'obtenir des *bornes inférieures* sur c_* par des choix appropriés de la fonction $g \in Y$.

Commentaires.

1) Si $g \in Y$, il n'est pas difficile de voir que $\int_0^1 ug(u) \, du < \infty$ et que $u^2g(u) \rightarrow 0$ lorsque $u \rightarrow 0$.

2) Si $g(u) = \varepsilon(2 - \varepsilon)u^{\varepsilon-2}$ pour un $\varepsilon \in]0, 1[$, alors $g'(u) = -\varepsilon(2 - \varepsilon)^2u^{\varepsilon-3}$. Ainsi

$$\int_0^1 \frac{g^2}{-g'} \, du = 1, \quad \int_0^1 fg \, du = \varepsilon(2 - \varepsilon) \int_0^1 u^{\varepsilon-2} f(u) \, du \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0+} 2f'(0),$$

donc le membre de droite de (2.9) est toujours supérieur ou égal à $4f'(0)$.

3) On peut montrer que le suprémum est atteint dans (2.9) si et seulement si $c_* > 2\sqrt{f'(0)}$.

Exemple. [HR], [BB*] Si $f(u) = u(1-u)(1+au)$, où $a \geq 0$, alors

$$c_* = \begin{cases} 2 & \text{si } 0 \leq a \leq 2, \\ \sqrt{\frac{2}{a}} + \sqrt{\frac{a}{2}} & \text{si } a \geq 2. \end{cases}$$

En particulier, le front est non linéaire (pushed) si et seulement si $a > 2$.

En effet, on sait que $c_* \geq 2\sqrt{f'(0)} = 2$. Si $0 \leq a \leq 2$, on utilise la formule (2.8) avec $g(u) = u(1-u)$. On trouve

$$g'(u) + \frac{f(u)}{g(u)} = 1 - 2u + 1 + au = 2 - (2-a)u \leq 2,$$

donc $c_* \leq 2$. Si $a > 2$, on pose $\kappa = \sqrt{a/2} > 1$ et on vérifie par calcul direct que la fonction $h(y) = (1 + e^{\kappa y})^{-1}$ est solution de (2.2) avec $c = \kappa + 1/\kappa$. Par définition de la vitesse minimale, on a donc

$$c_* \leq \kappa + \frac{1}{\kappa} = \sqrt{\frac{2}{a}} + \sqrt{\frac{a}{2}}.$$

Pour montrer l'inégalité dans l'autre sens, il suffit de remarquer que $h(y) \approx e^{-\kappa y} = e^{-\lambda y}$ lorsque $y \rightarrow +\infty$, car d'après (2.4) on a $\lambda_+ = \kappa$ si $c = \kappa + 1/\kappa$. Par le théorème 2.2, on conclut que c est bien la vitesse critique. On peut aussi utiliser la caractérisation (2.9) avec $g(u) = ((1-u)/u)^\gamma$, où $0 < \gamma < 2$. Par calcul direct, on trouve

$$\int_0^1 \frac{g^2}{-g'} du = \frac{1}{\gamma} \int_0^1 (1-u)^{1+\gamma} u^{1-\gamma} du = \frac{1}{\gamma} \frac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(2+\gamma)}{\Gamma(4)},$$

$$\int_0^1 g f du = \int_0^1 (1-u)^{1+\gamma} u^{1-\gamma} (1+au) du = \frac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(2+\gamma)}{\Gamma(4)} \left(1 + \frac{a(2-\gamma)}{4}\right),$$

donc

$$c_*^2 \geq 2\gamma \left(1 + \frac{a(2-\gamma)}{4}\right) = (2+a)\gamma - \frac{a\gamma^2}{2}.$$

En choisissant $\gamma = 1 + 2/a$, on obtient bien $c_*^2 \geq (\sqrt{2/a} + \sqrt{a/2})^2$. □

2.2. Existence des ondes progressives dans le cas bistable

Dans le cas bistable, l'ensemble des ondes progressives de l'équation (2.1) est nettement plus simple que dans le cas monostable, dans la mesure où la vitesse de propagation est unique. Le résultat suivant est également démontré dans les articles de Aronson et Weinberger [AW1], [AW2].

Théorème 2.3. *On suppose que $f \in C^1([0, 1])$ vérifie $f(0) = f(1) = 0$, et qu'il existe $a \in]0, 1[$ tel que $f(u) < 0$ pour tout $u \in]0, a[$ et $f(u) > 0$ pour tout $u \in]a, 1[$. Alors il existe un unique $c \in \mathbf{R}$ tel que l'équation (2.2) possède une solution $h : \mathbf{R} \rightarrow]0, 1[$. Cette solution est de classe C^3 , unique aux translations près, et vérifie $h'(y) < 0$ pour tout $y \in \mathbf{R}$.*

Le même résultat reste vrai dans le cas d'une non-linéarité de type combustion.

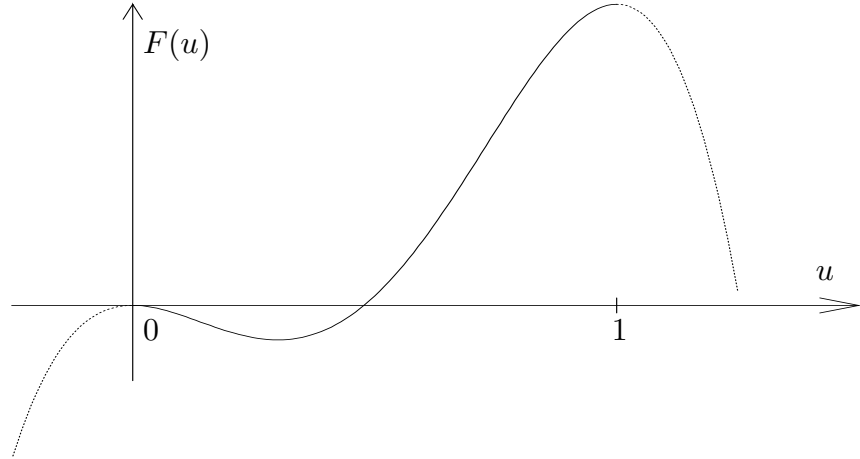


Fig. 4: Le potentiel $F(u)$ dans le cas bistable.

Dans le théorème 2.3, l'unicité vient du fait que le point $u = 0$ est à présent un *maximum local* du potentiel $F(u) = \int_0^u f(s) ds$. Il est clair que la vitesse c a le même signe que $F(1) = \int_0^1 f(u) du$. En effet, d'après (2.3),

$$c \int_{\mathbf{R}} (h')^2 dy = - \int_{\mathbf{R}} (h''(y)h'(y) + F'(h(y))h'(y)) dy = -\frac{1}{2}h'(y)^2 \Big|_{-\infty}^{+\infty} + F(1) ,$$

donc

$$c = \frac{\int_0^1 f(u) du}{\int_{\mathbf{R}} (h')^2 dy} .$$

On suppose désormais que $f'(0) < 0$ et $f'(1) < 0$. Comme $(h, h') = (1, 0)$ et $(h, h') = (0, 0)$ sont des points selles pour l'équation (2.2), on a nécessairement

$$\begin{cases} h(y) \approx A e^{-\mu y} & y \rightarrow +\infty , \\ 1 - h(y) \approx B e^{\nu y} & y \rightarrow -\infty , \end{cases}$$

où $A, B > 0$ et

$$\mu = \frac{1}{2} \left(c + \sqrt{c^2 - 4f'(0)} \right) > 0 , \quad \nu = \frac{1}{2} \left(-c + \sqrt{c^2 - 4f'(1)} \right) > 0 .$$

Exemple. Soit $f(u) = u(1 - u)(u - a)$, où $0 < a < 1$. Alors

$$c = \frac{1 - 2a}{\sqrt{2}} , \quad \text{et} \quad h(y) = \frac{1}{1 + e^{y/\sqrt{2}}} .$$

On a donc $c > 0$ si $0 < a < 1/2$, $c = 0$ si $a = 1/2$ et $c < 0$ si $1/2 < a < 1$.

Caractérisation “min-max” de la vitesse [VVV].

Sous les hypothèses du théorème 2.3, on a

$$c = \inf_{h \in Z} \sup_{y \in \mathbf{R}} \frac{h''(y) + f(h(y))}{-h'(y)} = \sup_{h \in Z} \inf_{y \in \mathbf{R}} \frac{h''(y) + f(h(y))}{-h'(y)} ,$$

où $Z = \{h \in C^2(\mathbf{R}) \mid h'(y) < 0 \ \forall y, \ h(-\infty) = 1, \ h(+\infty) = 0\}$.

Remarque. La formule (2.9) est également valable dans le cas bistable, et donne le carré de la vitesse du front.

2.3. Stabilité des ondes progressives dans le cas bistable

On suppose dans cette section que $f \in C^1([0, 1])$ vérifie $f(0) = f(1) = 0$, $f'(0) < 0$, $f'(1) < 0$, et qu'il existe $a \in]0, 1[$ tel que $f(u) < 0$ pour tout $u \in]0, a[$ et $f(u) > 0$ pour tout $u \in]a, 1[$. Soient $c > 0$ et $h : \mathbf{R} \rightarrow]0, 1[$ comme dans le théorème 2.3. On peut supposer que la fonction h est normalisée de façon que $h(0) = 1/2$.

Pour étudier la stabilité de l'onde progressive $u(x, t) = h(x - ct)$ en tant que solution de (2.1), on se place dans le *référentiel en mouvement* à la vitesse c en faisant le changement de variables $u(x, t) = v(x - ct, t)$. La nouvelle fonction v vérifie alors l'équation

$$\partial_t v(y, t) = \partial_y^2 v(y, t) + c \partial_y v(y, t) + f(v(y, t)) , \quad y \in \mathbf{R} , \quad t \geq 0 . \quad (2.10)$$

Par construction, h est un point d'équilibre (ou solution stationnaire) de (2.10). Pour déterminer sa stabilité, on commence par étudier *l'opérateur linéarisé* en ce point :

$$L = \partial_y^2 + c \partial_y + f'(h) .$$

Le point-clef est de localiser le spectre de cet opérateur dans un espace fonctionnel approprié, par exemple $L^2(\mathbf{R})$. Le domaine de L sera alors l'espace de Sobolev $H^2(\mathbf{R})$.

i) Etude du spectre essentiel

L'opérateur L est à coefficients variables, mais ses coefficients convergent (exponentiellement) vers des limites lorsque $y \rightarrow \pm\infty$. Dans ces conditions, il est bien connu [He] que L est une perturbation *relativement compacte* de l'opérateur limite $L_0 = \partial_y^2 + c \partial_y + f_\infty(y)$, où

$$f_\infty(y) = \begin{cases} f'(0) & \text{si } y > 0 , \\ f'(1) & \text{si } y < 0 . \end{cases}$$

Il s'ensuit en particulier que le *spectre essentiel* de L coïncide avec le spectre (essentiel) de L_0 . Ce dernier se calcule explicitement à l'aide de la transformation de Fourier [He]. Si $c \neq 0$, on trouve que $\sigma(L_0)$ est le domaine du plan complexe délimité par les deux paraboles

$$\{-k^2 + ick + f'(0) \mid k \in \mathbf{R}\} \quad \text{et} \quad \{-k^2 + ick + f'(1) \mid k \in \mathbf{R}\} .$$

On peut montrer que, si $\lambda \in \mathbf{C}$ se trouve sur l'une des deux paraboles, alors l'opérateur $\lambda - L_0$ n'est pas Fredholm. Si $f'(0) \neq f'(1)$ et si λ se trouve à l'intérieur du domaine délimité par les deux paraboles, alors $\lambda - L_0$ est un opérateur de Fredholm d'indice $\text{sign}(c(f'(0) - f'(1))) \neq 0$. D'autre part, si $c = 0$, alors L_0 est autoadjoint dans $L^2(\mathbf{R})$ avec

$$\sigma(L_0) =]-\infty, \max(f'(0), f'(1))].$$

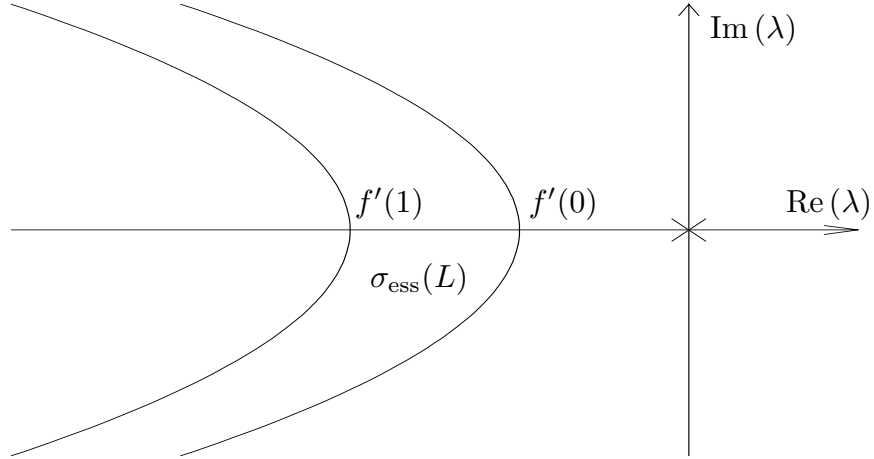


Fig. 5: Le spectre du linéarisé L (cas bistable) avec $c \neq 0$ et $f'(0) > f'(1)$. Suivant la non-linéarité f , l'intervalle $]f'(0), 0[$ peut contenir d'autres valeurs propres.

ii) Etude du spectre discret

Si $\lambda \in \sigma_{\text{dis}}(L) = \sigma(L) \setminus \sigma_{\text{ess}}(L)$, alors λ est une valeur propre de L de multiplicité finie (évidemment ≤ 2). En fait, les éventuelles valeurs propres de L à droite du spectre essentiel sont forcément réelles et isolées :

Proposition 2.4. *Si $\lambda \in \sigma(L)$ vérifie $\text{Re}(\lambda) > \max(f'(0), f'(1))$, alors $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda \leq 0$, et λ est une valeur propre isolée.*

Démonstration. Soit $w \in H^2(\mathbf{R})$ une fonction propre (non nulle) de L pour la valeur propre λ . Comme w est solution de l'équation différentielle ordinaire

$$w''(y) + cw'(y) + (f'(h(y)) - \lambda)w(y) = 0, \quad y \in \mathbf{R}, \quad (2.11)$$

une étude asymptotique montre que

$$w(y) \approx \begin{cases} C_+ \exp\left(\frac{1}{2}(-c - \sqrt{c^2 - 4f'(0) + 4\lambda})y\right) & \text{quand } y \rightarrow +\infty, \\ C_- \exp\left(\frac{1}{2}(-c + \sqrt{c^2 + 4f'(1) + 4\lambda})y\right) & \text{quand } y \rightarrow -\infty, \end{cases}$$

car l'hypothèse $\text{Re}(\lambda) > \max(f'(0), f'(1))$ entraîne que

$$\text{Re} \sqrt{c^2 - 4f'(0) + 4\lambda} > |c|, \quad \text{et} \quad \text{Re} \sqrt{c^2 + 4f'(1) + 4\lambda} > |c|.$$

Il s'ensuit que la fonction $z(y) = e^{cy/2}w(y)$ décroît exponentiellement à l'infini. En particulier, $z \in H^2(\mathbf{R})$ vérifie

$$z''(y) + \left(f'(h(y)) - \frac{c^2}{4}\right)z(y) = \lambda z(y), \quad y \in \mathbf{R}.$$

Ainsi λ est valeur propre d'un *opérateur de Schrödinger* autoadjoint dans $L^2(\mathbf{R})$, donc $\lambda \in \mathbf{R}$. Les calculs ci-dessus montrent également que λ est une valeur propre simple. Enfin λ est isolée car $\lambda > \max(f'(0), f'(1)) - c^2/4$.

Par ailleurs, en dérivant l'équation (2.2) par rapport à y , on trouve

$$\varphi''(y) + c\varphi'(y) + f'(h(y))\varphi(y) = 0, \quad y \in \mathbf{R},$$

où $\varphi = -h'$. Ainsi, $L\varphi = 0$. L'opérateur de Schrödinger ci-dessus possède donc également une valeur propre nulle, la fonction propre correspondante étant $e^{cy/2}\varphi(y)$. Cette fonction est strictement positive, donc la théorie de *Sturm-Liouville* affirme que $\lambda = 0$ est la plus grande valeur propre. \square

Remarque. L'argument ci-dessus montre que, dans les équations de réaction-diffusion (scalaires) invariantes par translation, seules des ondes progressives *monotones* peuvent être stables. En effet, si $\varphi = -h'$ change de signe, alors la théorie de Sturm-Liouville affirme que le linéarisé L possède au moins une valeur propre strictement positive.

Indiquons à présent quelques conséquences utiles de la proposition 2.4 et de sa démonstration. Notons

$$\psi(y) = \frac{1}{N} e^{cy}\varphi(y), \quad \text{où } N = \int_{\mathbf{R}} e^{cy}\varphi(y)^2 dy < \infty.$$

Alors $\psi \in H^2(\mathbf{R})$ vérifie $L^*\psi = 0$, où $L^* = \partial_y^2 - c\partial_y + f'(h)$ est l'opérateur adjoint de L dans $L^2(\mathbf{R})$. Le projecteur $P : L^2(\mathbf{R}) \rightarrow L^2(\mathbf{R})$ défini par

$$(Pw)(y) = \varphi(y) \int_{\mathbf{R}} \psi(z)w(z) dz$$

est le *projecteur spectral* sur le sous-espace propre de L associé à la valeur propre 0. On a donc $L^2(\mathbf{R}) = \text{Im}(P) \oplus \text{Ker}(P)$, où

$$\text{Im}(P) = \{\alpha\varphi \mid \varphi \in \mathbf{R}\}, \quad \text{Ker}(P) = \left\{ w \in L^2(\mathbf{R}) \mid \int_{\mathbf{R}} \psi w dy = 0 \right\}.$$

Cette décomposition en somme directe est stable par L . Par construction, la restriction de L au sous-espace $\text{Ker}(P)$ est un opérateur *sectoriel* dont le spectre est contenu dans le demi-plan $\{z \in \mathbf{C} \mid \text{Re}(z) \leq -\delta\}$ pour un $\delta > 0$. Il s'ensuit [He], [Pa] que le semi-groupe engendré par L vérifie

$$\|e^{tL}w\|_{L^2} \leq C e^{-\delta t} \|w\|_{L^2}, \quad \text{pour tout } t \geq 0 \text{ et tout } w \in \text{Ker}(P). \quad (2.12)$$

Remarque. On peut montrer que l'estimation (2.12) reste vraie dans d'autres espaces fonctionnels, par exemple $H^1(\mathbf{R})$ ou $L^p(\mathbf{R})$ pour $1 \leq p \leq \infty$.

Les considérations ci-dessus montrent que la famille $\{h(y - y_0) \mid y_0 \in \mathbf{R}\}$ des translatés de l'onde progressive h est *normalement hyperbolique* et attractive. On en déduit aisément un résultat de stabilité asymptotique :

Théorème 2.5. [Sa1], [Sa2]

Il existe $\varepsilon > 0$, $C > 0$ et $\delta > 0$ tels que, si $v_0(y) = h(y) + r(y)$ avec $\|r\|_{H^1} \leq \varepsilon$, alors il existe $y_0 \in \mathbf{R}$ (avec $|y_0| \leq C\varepsilon$) tel que la solution $v(y, t)$ de (2.10) pour la donnée initiale v_0 vérifie

$$\|v(y, t) - h(y - y_0)\|_{H^1} \leq C\varepsilon e^{-\delta t}, \quad t \geq 0.$$

Ce théorème de déduit des estimations spectrales ci-dessus par un argument général de variété centrale [He]. On peut aussi l'établir plus directement de la façon suivante. On cherche des solutions de (2.10) sous la forme

$$v(y, t) = h(y - s(t)) + r(y - s(t), t) , \quad (2.13)$$

où $s(t) \in \mathbf{R}$ et $\int_{\mathbf{R}} \psi(z)r(z, t) dz = 0$ pour tout t . Il est facile de vérifier, à l'aide du théorème des fonctions implicites, que toute fonction v dans un voisinage de h peut se décomposer de façon unique comme dans (2.13). En effet, pour s et r petits, on a $h(y - s) + r(y - s) \approx h(y) + s\varphi(y) + r(y)$, et comme $s\varphi \in \text{Im}(P)$ on peut donc prendre $r \in \text{Ker}(P)$.

En remplaçant (2.13) dans (2.10) et en notant $z = y - s(t)$, on arrive à l'équation

$$\partial_t r = Lr + \mathcal{N}(h, r) + s'(t)(h' + \partial_z r) , \quad (2.14)$$

où $L = \partial_z^2 + c\partial_z + f'(h)$ et $\mathcal{N}(h, r) = f(h + r) - f(h) - f'(h)r = \mathcal{O}(r^2)$ (si on suppose f de classe C^2). L'équation pour s' s'obtient en remarquant que

$$0 = \int_{\mathbf{R}} \psi \partial_t r dz = \int_{\mathbf{R}} \psi Lr dz + \int_{\mathbf{R}} \psi \left(\mathcal{N}(h, r) + s'(t)(h' + \partial_z r) \right) dz ,$$

d'où l'on déduit que

$$s'(t) \left(1 + \int_{\mathbf{R}} \psi' r dz \right) = \int_{\mathbf{R}} \psi \mathcal{N}(h, r) dz . \quad (2.15)$$

(On a utilisé le fait que $L^*\psi = 0$ et $\int_{\mathbf{R}} \psi h' dz = -\int_{\mathbf{R}} \psi \varphi dz = -1$.) Si r est suffisamment petit, l'intégrale du membre de gauche est petite devant 1, et (2.15) définit univoquement $s'(t)$. En remplaçant dans (2.14), on obtient pour $r(z, t)$ une équation de la forme :

$$\partial_t r = Lr + \mathcal{M}(h, r) , \quad (2.16)$$

où $\mathcal{M}(h, r)$ est la projection de $\mathcal{N}(h, r)$ sur $\text{Ker}(P)$ le long de la droite $\mathbf{R}(\varphi - \partial_z r)$. En particulier, si f est régulière et r suffisamment petit, on a $|\mathcal{M}(h, r)| \leq Cr^2(1 + |\partial_z r|)$.

Supposons que $s(0) = 0$ et que $\|r(\cdot, 0)\|_{H^1} = \varepsilon \ll 1$. Au vu de (2.12), il suit de (2.16) que $\|r(t)\|_{H^1} \leq C\varepsilon e^{-\delta t}$ pour tout $t \geq 0$. En utilisant (2.15), on obtient alors

$$s(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \int_0^\infty s'(t) dt \stackrel{\text{déf}}{=} y_0 , \quad \text{et} \quad |s(t) - y_0| \leq C\varepsilon^2 e^{-2\delta t} .$$

Ceci conclut la démonstration. □

Le théorème 2.5 est un résultat de stabilité *locale*. Sa démonstration, simple et robuste, se transpose à des systèmes plus généraux, le problème principal étant d'obtenir les estimations spectrales sur l'opérateur linéarisé. Dans le cas particulier de l'équation scalaire (2.10), en utilisant le *principe du maximum* ainsi que des *fonctions de Lyapunov*, on peut obtenir un résultat beaucoup plus général :

Théorème 2.6. [FM], [Fif] *Soit $v_0 : \mathbf{R} \rightarrow [0, 1]$ une fonction continue vérifiant*

$$\limsup_{y \rightarrow +\infty} v_0(y) < a , \quad \liminf_{y \rightarrow -\infty} v_0(y) > a ,$$

où $a \in]0, 1[$ est le zéro intermédiaire de f . Alors l'équation (2.10) possède une solution globale unique $v : \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+ \rightarrow [0, 1]$ avec donnée initiale v_0 , et il existe $C > 0$, $y_0 \in \mathbf{R}$ et $\delta > 0$ tels que

$$\sup_{y \in \mathbf{R}} |v(y, t) - h(y - y_0)| \leq C e^{-\delta t} , \quad t \geq 0 .$$

2.4. Stabilité des ondes progressives dans le cas monostable

On suppose dans cette section que $f \in C^1([0, 1])$, $f(0) = f(1) = 0$, $f'(0) > 0$, $f'(1) < 0$, et $f(u) > 0$ pour tout $u \in]0, 1[$. Pour $c \geq c_* \geq 2\sqrt{f'(0)}$, on note h_c la solution de (2.2) donnée par le théorème 2.1, normalisée de façon que $h_c(0) = 1/2$.

Comme dans le cas bistable, on considère l'équation (2.10) dans le référentiel en mouvement à vitesse c . La différence essentielle est que, comme $f'(0) > 0$, le spectre essentiel de l'opérateur linéarisé L n'est plus contenu dans le demi-plan $\{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Re}(z) \leq 0\}$: l'onde progressive est toujours *instable* pour des perturbations dans $L^2(\mathbf{R})$, car l'état d'équilibre $u = 0$ qu'elle envahit est linéairement instable pour l'équation (2.1). Cette instabilité n'empêche pas les fronts monostables d'être bien observés dans les expériences et les simulations numériques et, au niveau mathématique, de décrire le comportement asymptotique des solutions de (2.1) pour une grande classe de données initiales!

Pour obtenir un résultat de stabilité s'appliquant aux ondes progressives dans le cas monostable, il faut restreindre la classe des perturbations admissibles en travaillant dans des *espaces à poids* (Sattinger [Sa1], [Sa2]). En l'occurrence, on demande aux perturbations de décroître suffisamment vite lorsque $y \rightarrow +\infty$. Pour $\gamma \geq 0$, on définit

$$p_\gamma(y) = 1 + e^{\gamma y}, \quad y \in \mathbf{R}.$$

On se propose d'étudier l'équation linéarisée $\partial_t w = Lw$ dans l'espace $X_\gamma = L^2(\mathbf{R}, p_\gamma^2 dy)$ défini par

$$X_\gamma = \left\{ w \in L^2(\mathbf{R}) \mid \|w\|_{X_\gamma} \stackrel{\text{déf}}{=} \|p_\gamma w\|_{L^2} < \infty \right\}.$$

On remarque que $w \in X_\gamma$ si et seulement si $w \in L^2(\mathbf{R})$ et $e^{\gamma y} w \in L^2(\mathbf{R})$.

i) Etude du spectre essentiel

On pose $z = p_\gamma w$. Alors $\partial_t z = \mathcal{L}z$, où $\mathcal{L} = p_\gamma L p_\gamma^{-1}$, c'est-à-dire :

$$\mathcal{L} = \partial_y^2 + \left(c - \frac{2p'_\gamma}{p_\gamma} \right) \partial_y + \left(f'(h_c(y)) - \frac{cp'_\gamma}{p_\gamma} + \frac{2(p'_\gamma)^2}{p_\gamma^2} - \frac{p''_\gamma}{p_\gamma} \right).$$

Comme dans le cas bistable, \mathcal{L} est une perturbation relativement compacte de l'opérateur à coefficients constants par morceaux

$$\mathcal{L}_0 = \begin{cases} \partial_y^2 + c\partial_y + f'(1) & \text{si } y < 0, \\ \partial_y^2 + (c-2\gamma)\partial_y + (f'(0)-c\gamma+\gamma^2) & \text{si } y > 0. \end{cases}$$

Ainsi, le spectre essentiel de \mathcal{L} dans $L^2(\mathbf{R})$ est délimité par les deux paraboles

$$\{-k^2 + ick + f'(1) \mid k \in \mathbf{R}\} \quad \text{et} \quad \{-k^2 + i(c-2\gamma)k + (f'(0)-c\gamma+\gamma^2) \mid k \in \mathbf{R}\}.$$

(Si $\gamma = c/2$, la seconde parabole se réduit à la demi-droite $]-\infty, f'(0) - c^2/4]$.) Il s'ensuit que le spectre essentiel de \mathcal{L} est contenu dans le demi-plan $\{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Re}(z) \leq 0\}$ si et seulement si

$$f'(0) - c\gamma + \gamma^2 \leq 0.$$

Cette condition est équivalente à $c \geq 2\sqrt{f'(0)}$ et $\lambda_-(c) \leq \gamma \leq \lambda_+(c)$, où $\lambda_\pm(c)$ sont donnés par (2.4).

ii) Etude du spectre discret

On procède comme dans la démonstration de la proposition 2.4. Supposons que $\lambda \in \mathbf{C}$ est une valeur propre de L dans X_γ telle que $\operatorname{Re}(\lambda) > f'(0) - c\gamma + \gamma^2$ et $\operatorname{Re}(\lambda) > f'(1)$. Soit $w \in X_\gamma$ une fonction propre non nulle. Comme

$$\operatorname{Re} \sqrt{c^2 - 4f'(0) + 4\lambda} > \sqrt{c^2 - 4c\gamma + 4\gamma^2} = |c - 2\gamma| ,$$

il suit de (2.11) que

$$w(y) \approx C_+ \exp\left(\frac{1}{2}(-c - \sqrt{c^2 - 4f'(0) + 4\lambda})y\right) , \quad y \rightarrow +\infty .$$

(En effet, toute autre solution linéairement indépendante vérifie $e^{\gamma y}|w(y)| \rightarrow +\infty$ lorsque $y \rightarrow +\infty$.) De même $\operatorname{Re} \sqrt{c^2 - 4f'(1) + 4\lambda} > c$, donc

$$w(y) \approx C_- \exp\left(\frac{1}{2}(-c + \sqrt{c^2 - 4f'(1) + 4\lambda})y\right) , \quad y \rightarrow -\infty .$$

Ainsi la fonction $z(y) = e^{cy/2}w(y)$ décroît exponentiellement à l'infini, et vérifie

$$z''(y) + \left(f'(h(y)) - \frac{c^2}{4}\right)z(y) = \lambda z(y) , \quad y \in \mathbf{R} . \quad (2.17)$$

On en déduit que $\lambda \in \mathbf{R}$, et que λ est une valeur propre isolée car $\lambda > \max(f'(0), f'(1)) - c^2/4$. En outre, l'invariance par translation implique que $z(y) = -e^{cy/2}h'_c(y)$ est une solution strictement positive de (2.17) avec $\lambda = 0$, donc la théorie de Sturm-Liouville affirme que toute valeur propre λ vérifiant les hypothèses ci-dessus appartient en fait à \mathbf{R}_- .

Remarque. Si on suppose que $f'(u) \leq f'(0)$ pour tout $u \in [0, 1]$ (ce qui entraîne que $c_* = 2\sqrt{f'(0)}$), alors il suit de (2.17) que $\lambda \leq f'(0) - c^2/4 \leq f'(0) - c\gamma + \gamma^2$ (quel que soit γ). Dans ce cas, on voit donc que l'opérateur L ne possède aucune valeur propre à droite du spectre essentiel.

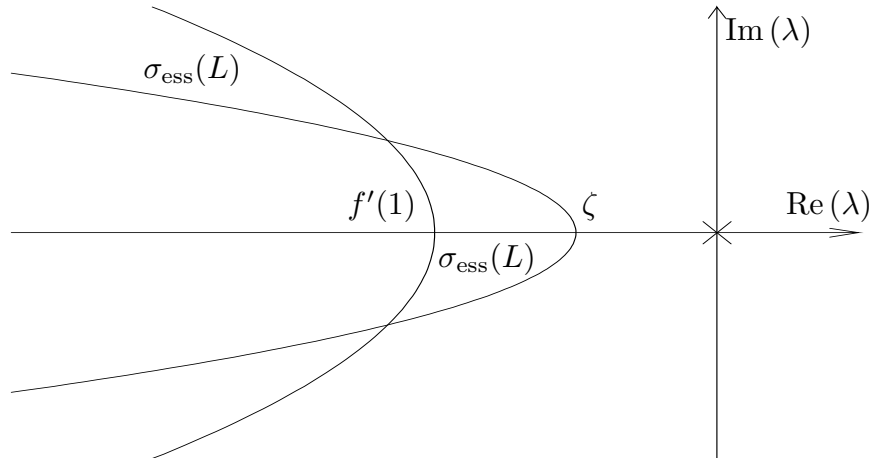


Fig. 6: Le spectre du linéarisé L dans l'espace X_γ (cas monostable). On note $\zeta = f'(0) - c\gamma + \gamma^2$. La valeur propre à l'origine n'est présente que dans le cas du front critique non linéaire $c = c_* > 2\sqrt{f'(0)}$.

Il convient à présent de distinguer plusieurs cas :

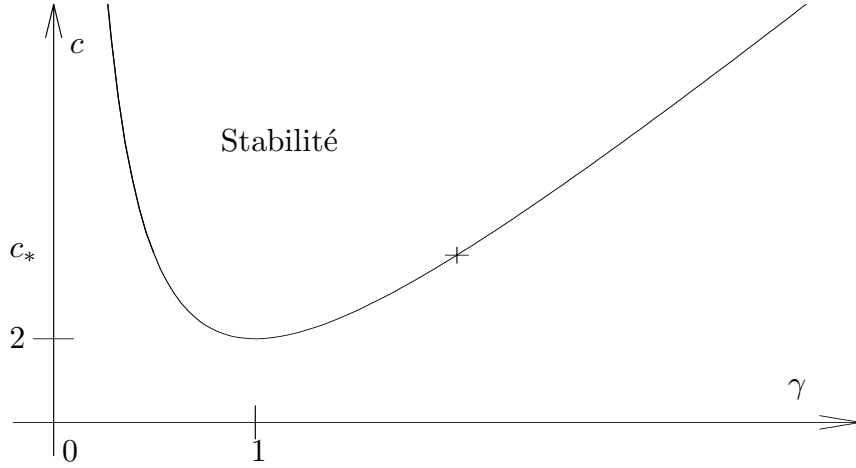


Fig. 7: Le domaine du plan γ, c où l'onde progressive est stable, dans le cas $f'(0) = 1$ et $c_* > 2$. La ligne foncée représente pour chaque $c > c_*$ la valeur $\gamma = \lambda_-(c)$ correspondant au taux de décroissance du front non critique. La croix indique la valeur $\gamma = \lambda_+(c_*)$ correspondant au taux de décroissance du front critique non linéaire.

A) Le front critique non linéaire

Supposons que $c = c_* > 2\sqrt{f'(0)}$, et choisissons $\gamma > 0$ de façon que $f'(0) - c\gamma + \gamma^2 < 0$. Dans ce cas, il suit du théorème 2.2 que $h'_c \in X_\gamma$, donc le spectre de l'opérateur L dans X_γ est tout à fait semblable à celui du linéarisé dans le cas bistable: $\lambda = 0$ est une valeur propre isolée, et le reste du spectre est strictement contenu dans le demi-plan $\{z \in \mathbf{C} \mid \text{Re}(z) < 0\}$. En procédant comme avant, on obtient donc l'analogue du théorème 2.5.

Théorème 2.7. [Sa1], [Sa2]

On suppose que $c = c_* > 2\sqrt{f'(0)}$ et $f'(0) - c\gamma + \gamma^2 < 0$. Il existe $\varepsilon > 0$, $C > 0$ et $\delta > 0$ tels que, si $v_0(y) = h_c(y) + r(y)$ avec $\|p_\gamma r\|_{H^1} \leq \varepsilon$, alors il existe $y_0 \in \mathbf{R}$ (avec $|y_0| \leq C\varepsilon$) tel que la solution $v(y, t)$ de (2.10) pour la donnée initiale v_0 vérifie

$$\|p_\gamma(v(y, t) - h_c(y - y_0))\|_{H^1} \leq C\varepsilon e^{-\delta t}, \quad t \geq 0.$$

Remarque. On sait que $\delta \leq -(f'(0) - c\gamma + \gamma^2) \leq -(f'(0) - c^2/4)$ et $\delta \leq -f'(1)$, mais le taux de décroissance δ peut être plus petit, à cause de la présence de valeurs propres.

B) Le front non critique

Supposons que $c > c_* \geq 2\sqrt{f'(0)}$, et choisissons $\gamma > 0$ de façon que $f'(0) - c\gamma + \gamma^2 < 0$. Dans ce cas, le théorème 2.2 affirme que $h'_c \notin X_\gamma$, ce qui implique que 0 n'est pas valeur propre de L dans X_γ . En d'autres termes, l'espace des perturbations admissibles X_γ est trop petit pour permettre des translations du front, car il ne contient pas les différences $h_c(y - y_0) - h_c(y)$ pour $y_0 \neq 0$. Il s'ensuit que l'on a l'estimation

$$\|p_\gamma e^{tL} w\|_{L^2} \leq C e^{-\delta t} \|p_\gamma w\|_{L^2} \quad \text{pour tout } t \geq 0 \text{ et tout } w \in X_\gamma,$$

sans aucune condition d'orthogonalité sur w . On montre alors facilement la stabilité asymptotique de chaque onde progressive (individuellement), pour des perturbations dans X_γ .

Théorème 2.8. [Sa1], [Sa2]

On suppose que $c > c_* \geq 2\sqrt{f'(0)}$ et $f'(0) - c\gamma + \gamma^2 < 0$. Il existe $\varepsilon > 0$, $C > 0$ et $\delta > 0$ tels que, si $v_0(y) = h_c(y) + r(y)$ avec $\|p_\gamma r\|_{H^1} \leq \varepsilon$, alors la solution $v(y, t)$ de (2.10) pour la donnée initiale v_0 vérifie

$$\|p_\gamma(v(y, t) - h_c(y))\|_{H^1} \leq C\varepsilon e^{-\delta t}, \quad t \geq 0.$$

Remarque. Supposons que $c_* > 2\sqrt{f'(0)}$, et choisissons $\gamma > 0$ de façon que $f'(0) - c_*\gamma + \gamma^2 < 0$. Si $c > c_*$ et c est suffisamment proche de c_* , un argument de perturbation montre que l'opérateur L possède une valeur propre négative proche de zéro. Ainsi le taux de décroissance $\delta > 0$ n'est pas donné par la position du spectre essentiel dans ce cas.

C) Le front critique linéaire

Si $c = c_* = 2\sqrt{f'(0)}$, l'unique choix possible est $\gamma = c/2$. Dans ce cas, et plus généralement lorsque $c \geq c_* \geq 2\sqrt{f'(0)}$ et $f'(0) - c\gamma + \gamma^2 = 0$, le spectre essentiel de L dans X_γ touche l'origine et on ne peut plus espérer montrer la stabilité de l'onde progressive par les méthodes ci-dessus. Il est clair également que les perturbations ne peuvent pas décroître exponentiellement vers zéro ou vers un translaté du front. Par d'autres méthodes, en utilisant par exemple le principe du maximum ou des fonctions de Lyapunov, on peut toutefois montrer la stabilité en l'absence de trou spectral, au moins sur des exemples.

On suppose désormais que f est concave sur $[0, 1]$, ce qui implique que $c_* = 2\sqrt{f'(0)}$. Etant donné $c \geq c_*$, on choisit

$$\gamma = \lambda_-(c) = \frac{1}{2} \left(c - \sqrt{c^2 - 4f'(0)} \right).$$

Alors $f'(0) - c\gamma + \gamma^2 = 0$. Ce choix de γ donne l'espace de perturbation X_γ le plus grand possible pour lequel le spectre essentiel de l'opérateur linéarisé soit stable. Par le théorème 2.2, on sait que $h_c(y) \approx e^{-\gamma y}$ lorsque $y \rightarrow +\infty$ si $c > c_*$, et $h_c(y) \approx ye^{-\gamma y}$ si $c = c_*$. Il s'ensuit que $h'_c \notin X_\gamma$, donc l'espace X_γ est (juste) trop petit pour permettre les translations du front. On obtient alors un résultat de stabilité asymptotique de chaque onde progressive individuellement.

Théorème 2.9. [EW], [GR1]

On suppose que f est concave sur $[0, 1]$, que $c \geq c_*$ et que $\gamma = \lambda_-(c)$. Il existe $\varepsilon > 0$ et $C > 0$ tels que, si $v_0(y) = h_c(y) + r(y)$ avec $\|p_\gamma r\|_{H^1} \leq \varepsilon$, alors la solution $v(y, t)$ de (2.10) pour la donnée initiale v_0 vérifie $\|p_\gamma(v(y, t) - h_c(y))\|_{H^1} \leq C\varepsilon$ pour tout $t \geq 0$, et

$$\|p_\gamma(v(y, t) - h_c(y))\|_{L^\infty} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Remarque. Aucun taux de décroissance en temps n'est donné dans ce résultat! Si l'on restreint quelque peu l'espace des perturbations admissibles, on peut donner un taux de décroissance algébrique en temps, cf. [Ka1] dans le cas non critique et [Ga] dans le cas critique.

Démonstration. On suppose pour simplifier que $f(u) = u(1 - u)$, de sorte que $c_* = 2$. Sans restriction de généralité, on suppose aussi que l'onde progressive h_c est normalisée de façon que $h_c(0) \geq 3/4$, et on se donne une constante $K > 0$ telle que $e^{-\gamma y} \leq Kh_c(y)$ pour tout $y \geq 0$. En posant $v = h_c + w$ et en remplaçant dans (2.10), on trouve avec le choix ci-dessus de f :

$$\partial_t w = \partial_y^2 w + c \partial_y w + (1 - 2h_c)w - w^2 . \quad (2.18)$$

Enfin, si l'on définit $\omega(y, t) = e^{\gamma y} w(y, t)$, on obtient l'équation

$$\partial_t \omega = \partial_y^2 \omega + (c - 2\gamma) \partial_y \omega - 2h_c \omega - e^{-\gamma y} \omega^2 . \quad (2.19)$$

Ici on a utilisé le fait que $1 - c\gamma + \gamma^2 = 0$.

L'idée est à présent de résoudre simultanément les équations (2.18), (2.19) dans $H^1(\mathbf{R})$. Comme la norme $\|p_\gamma w\|_{H^1}^2$ est équivalente à $\|w\|_{H^1}^2 + \|\omega\|_{H^1}^2$, ceci revient à étudier l'équation (2.18) dans $H^1(\mathbf{R}, p_\gamma^2 dy)$. L'existence locale et l'unicité de la solution se montrent sans peine par un argument classique de point fixe [He], [Pa]. Pour montrer l'existence globale à données petites et contrôler le comportement asymptotique, on se donne une solution (définie sur un certain intervalle de temps) vérifiant $\|w(\cdot, t)\|_{L^\infty} + \|\omega(\cdot, t)\|_{L^\infty} \leq \varepsilon$, pour un $\varepsilon \leq 1$. On utilise les estimations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbf{R}} \omega^2 dy &= \int_{\mathbf{R}} \omega \partial_t \omega dy \\ &= - \int_{\mathbf{R}} \left((\partial_y \omega)^2 + 2h_c \omega^2 + e^{-\gamma y} \omega^3 \right) dy \\ &\leq - \int_{\mathbf{R}} (\partial_y \omega)^2 dy - (2 - C\varepsilon) \int_{\mathbf{R}} h_c \omega^2 dy , \end{aligned}$$

car $\int_0^\infty e^{-\gamma y} |\omega^3| dy \leq K\varepsilon \int_0^\infty h_c \omega^2 dy$ et

$$\int_{-\infty}^0 e^{-\gamma y} |\omega^3| dy = \int_{-\infty}^0 |w| \omega^2 dy \leq \varepsilon \int_{-\infty}^0 \omega^2 dy \leq \frac{4\varepsilon}{3} \int_{-\infty}^0 h_c \omega^2 dy .$$

De façon similaire,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbf{R}} (\partial_y \omega)^2 dy &= - \int_{\mathbf{R}} (\partial_y^2 \omega) \partial_t \omega dy \\ &= \int_{\mathbf{R}} \left(-(\partial_y^2 \omega)^2 + 2(\partial_y^2 \omega) h_c \omega + (\partial_y^2 \omega) e^{-\gamma y} \omega^2 \right) dy \\ &\leq 2 \int_{\mathbf{R}} h_c^2 \omega^2 dy + \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}} e^{-2\gamma y} \omega^4 dy \leq (2 + C\varepsilon^2) \int_{\mathbf{R}} h_c \omega^2 dy . \end{aligned}$$

Si $\varepsilon > 0$ est assez petit, on trouve donc

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbf{R}} \left(\omega^2 + \frac{1}{2} (\partial_y \omega)^2 \right) dy \leq -2 \int_{\mathbf{R}} (\partial_y \omega)^2 dy - \int_{\mathbf{R}} h_c \omega^2 dy .$$

On procède de même pour l'équation (2.18). On a d'une part

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbf{R}} w^2 dy &= \int_{\mathbf{R}} w \partial_t w dy \\ &= - \int_{\mathbf{R}} (\partial_y w)^2 dy + \int_{\mathbf{R}} (1 - 2h_c) w^2 dy - \int_{\mathbf{R}} w^3 dy \\ &\leq - \int_{\mathbf{R}} (\partial_y w)^2 dy - \left(\frac{1}{2} - C\varepsilon \right) \int_{-\infty}^0 w^2 dy + (1 + \varepsilon) \int_0^{\infty} w^2 dy , \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbf{R}} (\partial_y w)^2 dy &= - \int_{\mathbf{R}} (\partial_y^2 w) \partial_t w dy \\ &= - \int_{\mathbf{R}} (\partial_y^2 w)^2 dy - \int_{\mathbf{R}} (\partial_y^2 w) (1 - 2h_c) w dy + \int_{\mathbf{R}} (\partial_y^2 w) w^2 dy \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}} w^2 dy + \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}} w^4 dy \leq \frac{1 + \varepsilon^2}{2} \int_{\mathbf{R}} w^2 dy . \end{aligned}$$

Comme $\int_0^{\infty} w^2 dy \leq K \int_0^{\infty} h_c \omega^2 dy$, on trouve pour $\varepsilon > 0$ est assez petit :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbf{R}} \left(w^2 + \frac{1}{2} (\partial_y w)^2 \right) dy \leq -2 \int_{\mathbf{R}} (\partial_y w)^2 dy - \frac{1}{4} \int_{\mathbf{R}} w^2 dy + 4K \int_{\mathbf{R}} h_c \omega^2 dy .$$

On définit maintenant

$$\begin{aligned} E &= \int_{\mathbf{R}} \left\{ 4K \left(\omega^2 + \frac{1}{2} (\partial_y \omega)^2 \right) + w^2 + \frac{1}{2} (\partial_y w)^2 \right\} dy , \\ F &= \int_{\mathbf{R}} \left(8K (\partial_y \omega)^2 + 2 (\partial_y w)^2 + \frac{1}{4} w^2 \right) dy . \end{aligned}$$

La quantité E est clairement équivalente à $\|p_\gamma w\|_{H^1}^2$. En particulier, on a $\|w\|_{L^\infty} + \|\omega\|_{L^\infty} \leq CE^{1/2}$. Si E est assez petit, on a montré qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\frac{dE}{dt} \leq -F \leq 0 , \quad \frac{dF}{dt} \leq CE .$$

On en déduit que $E(t)$ reste borné pour tous les temps $t \geq 0$ si $E(0)$ est suffisamment petit, ce qui montre l'existence globale à données petites. En outre, on a

$$\int_0^{\infty} F(s) ds \leq E(0) - E(+\infty) \leq E(0) < \infty ,$$

et comme $F'(t)$ est borné on en déduit que $F(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow +\infty$. Par interpolation, on conclut que

$$\|p_\gamma w(\cdot, t)\|_{L^\infty} \leq CE(t)^{1/4} F(t)^{1/4} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 .$$

Ceci achève la démonstration. □

Dans le cas particulier du front critique ($c = c_*$), le résultat suivant donne une description précise du comportement asymptotique en temps des solutions. La démonstration est beaucoup plus difficile, et repose sur une méthode de changement d'échelle (ou *renormalisation*) qui permet d'étudier finement les propriétés spectrales de l'opérateur linéarisé.

Théorème 2.10. [Ga], [GR2]

On suppose que f est concave sur $[0, 1]$, que $c = c_*$ et que $\gamma = c/2$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que, si $v_0(y) = h_c(y) + r(y)$ avec $\|(1 + y^2 e^{\gamma y})r\|_{H^1} \leq \varepsilon$, alors il existe $\alpha_* \in \mathbf{R}$ tel que la solution $v(y, t)$ de (2.10) pour la donnée initiale v_0 vérifie

$$\sup_{y \in \mathbf{R}} \left(1 + \frac{e^{\gamma y}}{1 + |y|}\right) \left| v(y, t) - h_c(y) - \frac{\alpha_*}{t^{3/2}} h'_c(y) \varphi_*\left(\frac{y}{\sqrt{t}}\right) \right| = \mathcal{O}(t^{-7/4} \log(t)) ,$$

lorsque $t \rightarrow +\infty$, où

$$\varphi_*(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \xi \leq 0 , \\ e^{-\xi^2/4} & \text{si } \xi \geq 0 . \end{cases}$$

2.5. Sélection de la vitesse dans le cas monostable

Dans le cas bistable, le théorème 2.6 montre que pour toute donnée initiale dont le graphe ressemble grossièrement à celui du front reliant les points d'équilibre $u = 1$ et $u = 0$, la solution de (2.1) converge uniformément vers une onde progressive lorsque $t \rightarrow +\infty$. Ce résultat est naturel dans la mesure où il n'existe dans ce cas qu'une seule onde progressive, aux translations spatiales près. La même problème est sensiblement plus difficile dans le cas monostable, où l'on a une famille d'ondes progressives réellement distinctes, indexée par la vitesse $c \in [c_*, +\infty[$. Il se pose alors un délicat problème de *sélection*: en supposant que la solution converge vers une onde progressive, comment déterminer la vitesse de cette onde en fonction de la donnée initiale ? De façon plus imagée, parmi toutes les vitesses possibles, laquelle est-elle sélectionnée par une solution particulière ?

Cette question importante a été résolue par Kolmogorov, Petrovsky et Piskunov en 1937 [KPP], dans le cas où la non-linéarité vérifie $f'(u) \leq f'(0)$ et où la donnée initiale est une fonction de Heaviside. Très en avance sur son temps, ce travail est vraiment l'article fondateur de toute la théorie des ondes progressives dans les systèmes de réaction-diffusion. Le problème a ensuite été étudié par Kanel [K1], [K2] pour des non-linéarités de type combustion, puis plus généralement par Uchiyama [U1], Bramson [Br], et Lau [La]. Les résultats les plus fins ont été obtenus par Bramson par des techniques probabilistes basées sur la formule de Feynman-Kač, mais l'approche de Lau est considérablement plus simple.

Théorème 2.11. [Br], [La]

On suppose que $f \in C^2([0, 1])$ vérifie $f(0) = f(1) = 0$, $f(u) > 0$ pour tout $u \in]0, 1[$ et $f'(u) \leq f'(0) = 1$ pour tout $u \in [0, 1]$. Si $u_0 : \mathbf{R} \rightarrow [0, 1]$ vérifie

$$\liminf_{x \rightarrow -\infty} u_0(x) > 0 , \quad \text{et} \quad \int_0^\infty x e^x u_0(x) dx < \infty , \quad (2.20)$$

alors il existe $y_0 \in \mathbf{R}$ tel que la solution de (2.1) avec données initiales u_0 vérifie

$$\sup_{y \in \mathbf{R}} |u(y + m(t), t) - h_c(y - y_0)| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 ,$$

où $m(t) = 2t - (3/2) \log(t)$.

La seconde condition dans (2.20) est vérifiée dès que $u_0(x)$ décroît suffisamment vite lorsque $x \rightarrow +\infty$. Dans ce cas, le théorème établit deux propriétés importantes :

- 1) C'est toujours la vitesse *minimale* $c = c_* = 2$ qui est sélectionnée;
- 2) La solution ne converge pas vers une onde progressive particulière, mais *dérive* lentement le long de la famille $\{h_c(y - y_0) \mid y_0 \in \mathbf{R}\}$. La vitesse instantanée $m'(t) = 2 - 3/(2t)$ converge bien vers 2 lorsque $t \rightarrow +\infty$, mais le terme de dérive $\log(t)$ est néanmoins non borné.

D'autres ondes progressives peuvent être sélectionnées si la donnée initiale ne vérifie pas (2.20). Typiquement, les résultats de Bramson montrent que si la donnée initiale vérifie $u_0(x) \approx e^{-\lambda - (c)x}$ lorsque $x \rightarrow +\infty$ pour un $c > c_*$, alors la solution converge vers une onde progressive de vitesse c .

Récemment, Ebert et van Saarloos ont étudié les corrections d'ordre supérieur à la vitesse instantanée du front $m'(t)$ en utilisant des développements asymptotiques raccordés (non rigoureux). Leur résultat, bien confirmé par les expériences numériques, se formule ainsi :

Conjecture 2.12. [EvS], [vS3]

Sous les hypothèses du théorème 2.11, on a

$$\sup_{y \in \mathbf{R}} |u(y + m(t), t) - h_{c(t)}(y)| = \mathcal{O}(1/t^2) , \quad t \rightarrow +\infty ,$$

où

$$m'(t) = c(t) = 2 - \frac{3}{2t} + \frac{3\sqrt{\pi}}{2t^{3/2}} + \mathcal{O}(1/t^2) , \quad t \rightarrow +\infty .$$

Les coefficients dans le développement asymptotique de $c(t)$ ne dépendent que de l'équation (2.1) linéarisée autour du point d'équilibre $u = 0$.

3. Perspectives

La plupart des résultats présentés dans le chapitre précédent se généralisent à des systèmes de réaction-diffusion à plusieurs composantes ($m \geq 2$), mais l'absence de principe du maximum (et, accessoirement, de structure gradient) complique sérieusement l'analyse. La classe des phénomènes à étudier est aussi beaucoup plus vaste : alors que dans le cas scalaire seules des ondes progressives de profil monotone (front) peuvent être stables, de nombreux systèmes possèdent des solutions stables non monotones (pulses, solitons, multi-solitons, ...). Ces solutions ont surtout été étudiées sur des systèmes particuliers, par exemple des systèmes singulièrement perturbés [J3], [MDK], [DK] ou presque intégrables [KS]. Par ailleurs, des ondes progressives *modulées* pour lesquelles les états asymptotiques à l'infini sont périodiques en x ont été construites par des méthodes de bifurcation dans des systèmes généraux [SS1], et leur stabilité a été démontrée dans [SS2], [GSU].

Si les résultats de stabilité locale présentés ci-dessus s'étendent naturellement à une grande famille de systèmes (voir par exemple [KR], [RK]), il est en revanche beaucoup plus difficile de généraliser des résultats globaux tels que les théorèmes 2.6 et 2.11. La seule classe que l'on puisse traiter de façon générale est celle des systèmes monotones, où l'on dispose encore du principe du maximum. On renvoie à la monographie [VVV] pour un panorama complet des résultats connus dans cette direction. Très récemment, E. Risler a montré que l'on pouvait aussi généraliser le théorème 2.6 aux systèmes gradients à un nombre arbitraire de composantes [Ri]. En dehors de ces cas, il est extrêmement difficile d'obtenir des résultats de nature globale. La question de la sélection de la vitesse du front dans le cas monostable a fait l'objet de nombreux travaux non rigoureux. Un critère général (dit de "stabilité marginale") permet de prédire la vitesse asymptotique en fonction de la donnée initiale pour des systèmes très généraux [vS1], [vS2], [vS3], [LMN], mais cette approche n'a pas encore reçu de justification rigoureuse.

Nous nous sommes restreints jusqu'ici au cas de la dimension un d'espace, mais il est évidemment très important d'étudier les systèmes de réaction-diffusion en dimension supérieure. La situation la plus proche du cas précédent est celle d'un domaine cylindrique $\Omega = \mathbf{R} \times \Omega'$, où Ω' est un ouvert *borné* de \mathbf{R}^{d-1} . L'existence et la stabilité d'ondes progressives ont été abondamment étudiées dans ce cas, surtout pour des équations scalaires ou pour le système thermo-diffusif avec ou sans terme de convection [BeN], [BLR], [R], [MR]. Lorsque $\Omega = \mathbf{R}^d$, l'existence d'ondes progressives *planes* est immédiate, et leur stabilité a été démontrée dans le cas scalaire par [Xi1], [LX], [Ka2]. Toujours dans le cas scalaire, l'existence et la stabilité d'ondes *sphériques* ont été étudiés par [U2], [J1], [J2], [Ya], [Ro]. Le cas des fronts coniques ("flamme Bunsen") a fait l'objet d'études récentes [HMR], [HS], et la propagation des ondes dans des domaines périodiques est également activement étudiée [BH].

Enfin, de nombreux travaux ont été consacrés à définir et étudier l'analogie des ondes progressives dans des milieux hétérogènes. Dans ce cas, le terme de réaction dans (1.1) ou le terme de convection dépendent de la variable x de façon périodique, quasi-périodique, ou même aléatoire [BHR]. On pourra consulter l'article [Xi2] pour une revue des résultats dans cette direction.

Références

- [AW1] D.G. Aronson et H. F. Weinberger: *Nonlinear diffusion in population genetics, combustion, and nerve pulse propagation*, Lecture Notes in Math. Vol. **446**, 5–49, Springer, Berlin, 1975.
- [AW2] D.G. Aronson et H.F. Weinberger: *Multidimensional Nonlinear Diffusion Arising in Population Genetics*, Adv. in Math. **30** (1978), 33–76.
- [BD1] R.D. Benguria et M.C. Depassier: *Variational characterization of the speed of propagation of fronts for the nonlinear diffusion equation*, Comm. Math. Phys. **175** (1996), 221–227.
- [BD2] R.D. Benguria et M.C. Depassier: *Speed of fronts of the reaction-diffusion equation*, Phys. Rev. Letters **77** (1996), 1171–1173.
- [BB*] E. Ben-Jacob, H. Brand, G. Dee, L. Kramer et J.S. Langer: *Pattern propagation in nonlinear dissipative systems*, Physica **14D** (1985), 348–364.
- [BH] H. Berestycki et F. Hamel: *Front propagation in periodic excitable media*, Comm. Pure Appl. Math. **55** (2002), 949–1032.
- [BHR] H. Berestycki, F. Hamel et L. Roques: *Equations de réaction-diffusion et modèles d’invasions biologiques dans les milieux périodiques*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **339** (2004), 549–554.
- [BeL] H. Berestycki et B. Larrouturou: *Quelques aspects mathématiques de la propagation des flammes prémélangées*, Nonlinear partial differential equations and their applications. Collège de France Seminar, Vol. X, Pitman Res. Notes Math. Ser. **220** (1991), 65–129.
- [BLR] H. Berestycki, B. Larrouturou, et J.-M. Roquejoffre: *Stability of travelling fronts in a model for flame propagation. I. Linear analysis*, Arch. Rational Mech. Anal. **117** (1992), 97–117.
- [BeN] H. Berestycki et L. Nirenberg: *Travelling fronts in cylinders*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **9** (1992), 497–572.
- [BiN] J. Billingham et D.J. Needham: *The development of travelling waves in quadratic and cubic autocatalysis with unequal diffusion rates. I. Permanent form travelling waves*, Phil. Trans. R. Soc. Lond. A **334** (1991), 1–24.
- [Br] M. Bramson: *Convergence of Solutions of the Kolmogorov Equation to Travelling Waves*, Memoirs of the AMS **44**, nb. 285, Providence, 1983.
- [CaH] Th. Cazenave et A. Haraux: *Introduction aux Problèmes d’Evolution Semi-linéaires*, Mathématiques et Applications **1**, Ellipses, 1990.
- [E] .A. Coddington et N. Levinson: *Theory of ordinary differential equations*, McGraw-Hill, New York-Toronto-London, 1955.
- [DK] A. Doelman et T. Kaper: *Semistrong pulse interactions in a class of coupled reaction-diffusion equations*, SIAM J. Appl. Dyn. Syst. **2** (2003), 53–96 (electronic).
- [EvS] U. Ebert et W. van Saarloos: *Front propagation into unstable states: universal algebraic convergence towards uniformly translating pulled fronts*, Phys. D **146** (2000), 1–99.

- [EW] J.-P. Eckmann et C.E. Wayne: *The Nonlinear Stability of Front Solutions for Parabolic Partial Differential Equations*, Comm. Math. Phys. **161** (1994), 323–334.
- [FM] P.C. Fife et J.B. McLeod: *The Approach of Solutions of Nonlinear Diffusion Equations to Travelling Front Solutions*, Arch. Rat. Mech. Anal. **65** (1977), 335–361.
- [Fif] P.C. Fife: *Long time behavior of solutions of bistable nonlinear diffusion equations*, Arch. Rational Mech. Anal. **70** (1979), 31–46.
- [Fis] R.A. Fisher: *The Advance of Advantageous Genes*, Ann. of Eugenics **7** (1937), 355–369.
- [Ga] Th. Gallay: *Local Stability of Critical Fronts in Nonlinear Parabolic Partial Differential Equations*, Nonlinearity **7** (1994), 741–764.
- [GR1] Th. Gallay et G. Raugel: *Stability of Travelling Waves for a Damped Hyperbolic Equation*, ZAMP **48** (1997), 451–479.
- [GR2] Th. Gallay et G. Raugel: *Scaling variables and stability of hyperbolic fronts*, SIAM J. Math. Anal. **32** (2000), 1–29.
- [GS] Th. Gallay et S. Slijepčević: *Energy flow in formally gradient partial differential equations on unbounded domains*, J. Dynam. Differential Equations **13** (2001), 757–789.
- [GSU] Th. Gallay, G. Schneider et H. Uecker: *Stable transport of information near essentially unstable localized structures*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B **4** (2004), 349–390.
- [HR] K. Hadeler et F. Rothe: *F. Travelling fronts in nonlinear diffusion equations*, J. Math. Biol. **2** (1975), 251–263.
- [HaR] J. Hale et G. Raugel: *Convergence in gradient-like systems with applications to PDE*, Z. Angew. Math. Phys. **43** (1992), 63–124.
- [HMR] F. Hamel, R. Monneau, J.-M. Roquejoffre: *Stability of travelling waves in a model for conical flames in two space dimensions*, Ann. Sci. cole Norm. Sup. **37** (2004), 469–506.
- [HS] M. Haragus et A. Scheel: *Corner defects in almost planar interface propagation*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, à paraître.
- [HJ] A. Haraux et M.A. Jendoubi: *Convergence of solutions of second-order gradient-like systems with analytic nonlinearities*, J. Differential Equations **144** (1998), 313–320.
- [He] D. Henry: *Geometric theory of semilinear parabolic equations*, Lecture Notes in Mathematics **840**, Springer, Berlin, 1981.
- [Hi] M.W. Hirsch: *Stability and convergence in strongly monotone dynamical systems*, J. Reine Angew. Math. **383** (1988), 1–53.
- [J1] C.K.R.T Jones: *Spherically symmetric solutions of a reaction-diffusion equation*, J. Differential Equations **49** (1983), 142–169.
- [J2] C.K.R.T Jones: *Asymptotic behaviour of a reaction-diffusion equation in higher space dimensions*, Rocky Mountain J. Math. **13** (1983), 355–364.
- [J3] C.K.R.T Jones: *Stability of the travelling wave solution of the FitzHugh-Nagumo*

- system, Trans. Amer. Math. Soc. **286** (1984), 431–469.
- [K1] Ja.I. Kanel': *Stabilization of solutions of the Cauchy problem for equations encountered in combustion theory* (en russe), Mat. Sb. (N.S.) **59** (1962), 245–288.
- [K2] Ja.I. Kanel': *Stabilization of the solutions of the equations of combustion theory with finite initial functions* (en russe), Mat. Sb. **65** (1964), 398–413.
- [Ka1] T. Kapitula: *On the Stability of Travelling Waves in Weighted L^∞ Spaces*, J. Diff. Eqns **112** (1994), 179–215.
- [Ka2] T. Kapitula: *Multidimensional stability of planar travelling waves*, Trans. Amer. Math. Soc. **349** (1997), 257–269.
- [KS] T. Kapitula et B. Sandstede: *Stability of bright solitary-wave solutions to perturbed nonlinear Schrödinger equations*, Phys. D **124** (1998), 58–103.
- [KR] K. Kirchgässner et G. Raugel: *Stability of Fronts for a KPP system : The Non-Critical Case*, in *Dynamics of nonlinear waves in dissipative systems: reduction, bifurcation and stability*, G. Dangelmayr, B. Fiedler, K. Kirchgässner, A. Mielke, Pitman Research Notes in Mathematics Series **352**, Longman, 1996.
- [KPP] A.N. Kolmogorov, I.G. Petrovskii et N.S. Piskunov: *Etude de la diffusion avec croissance de la quantité de matière et son application à un problème biologique*, Moscow Univ. Math. Bull. **1** (1937), 1–25.
- [La] K.-S. Lau: *On the nonlinear diffusion equation of Kolmogorov, Petrovsky, and Piskunov*, J. Differential Equations **59** (1985), 44–70.
- [LX] C. Levermore et J. Xin: *Multidimensional stability of traveling waves in a bistable reaction-diffusion equation. II*, Comm. Partial Differential Equations **17** (1992), 1901–1924.
- [LMN] M. Lucia, C. Muratov et M. Novaga: *Linear vs. nonlinear selection for the propagation speed of the solutions of scalar reaction-diffusion equations invading an unstable equilibrium*, Comm. Pure Appl. Math. **57** (2004), 616–636.
- [MR] J.-F. Mallordy et J.-M. Roquejoffre: *A parabolic equation of the KPP type in higher dimensions*, SIAM J. Math. Anal. **26** (1995), 1–20.
- [MP] R.H. Martin et M. Pierre: *Nonlinear reaction-diffusion systems*, Nonlinear equations in the applied sciences, Math. Sci. Engrg. **185** (1992), 363–398, Academic Press, Boston.
- [Ma] H. Matano: *Convergence of solutions of one-dimensional semilinear parabolic equations*, J. Math. Kyoto Univ. **18** (1978), 221–227.
- [MDK] D. Morgan, A. Doelman et T. Kaper: *Stationary periodic patterns in the 1D Gray-Scott model*, Methods Appl. Anal. **7** (2000), 105–149.
- [Mu] J.D. Murray: *Mathematical Biology* 2nd ed., Biomathematics **19**, Springer Verlag, 1993.
- [Pa] A. Pazy: *Semigroup of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, 1983.
- [Po] P. Poláčik: *Parabolic equations: asymptotic behavior and dynamics on invariant manifolds*, Handbook of dynamical systems, vol. **2**, 835–883, North-Holland, Amsterdam, 2002.
- [PW] M.H. Protter et H.F. Weinberger: *Maximum Principles in Partial Differential*

- Equations*, Prentice Hall, Englewood Cliffs N.J.(1967).
- [RK] G. Raugel, K. Kirchgässner: *Stability of Fronts for a KPP-System, II: The Critical Case*, J. Differential Equations **146** (1998), 399–456.
- [Ri] E. Risler: *Global convergence towards travelling fronts for spatially extended gradient-like systems*, prépublication.
- [R] J.-M. Roquejoffre: *Stability of travelling fronts in a model for flame propagation. II. Nonlinear stability*, Arch. Rational Mech. Anal. **117** (1992), 119–153.
- [Ro] V. Roussier: *Stability of radially symmetric travelling waves in reaction-diffusion equations*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **21** (2004), 341–379.
- [SS1] B. Sandstede et A. Scheel: *Essential instability of pulses and bifurcations to modulated travelling waves*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **129** (1999), 1263–1290.
- [SS2] B. Sandstede et A. Scheel: *Spectral stability of modulated travelling waves bifurcating near essential instabilities*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **130** (2000), 419–448.
- [Sa1] D.H. Sattinger: *On the Stability of Waves of Nonlinear Parabolic Systems*, Adv. Math. **22** (1976), 312–355.
- [Sa2] D.H. Sattinger: *Weighted norms for the stability of traveling waves*, J. Differential Equations **25** (1977), 130–144.
- [Sm] H.L. Smith: *Monotone dynamical systems. An introduction to the theory of competitive and cooperative systems*, Mathematical Surveys and Monographs **41**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1995.
- [Va] S. Vakulenko: *Dissipative systems generating any structurally stable chaos*, Adv. Differential Equations **5** (2000), 1139–1178.
- [vS1] W. van Saarloos: *Front propagation into unstable states: marginal stability as a dynamical mechanism for velocity selection*, Phys. Rev. A (3) **37** (1988), 211–229.
- [vS2] W. van Saarloos: *Front propagation into unstable states. II. Linear versus nonlinear marginal stability and rate of convergence*, Phys. Rev. A **39** (12) (1989), 6367–6390.
- [vS3] W. van Saarloos: *Front propagation into unstable states*, Physics Reports **386** (2003), 29–222.
- [U1] K. Uchiyama: *The behavior of solutions of some nonlinear diffusion equations for large time*, J. Math. Kyoto Univ. **18** (1978), 453–508.
- [U2] K. Uchiyama: *Asymptotic behavior of solutions of reaction-diffusion equations with varying drift coefficients*, Arch. Rational Mech. Anal. **90** (1985), 291–311.
- [VVV] A.I. Volpert, V.A. Volpert et V.A. Volpert: *Traveling wave solutions of parabolic systems*, Translations of Mathematical Monographs **140**, American Mathematical Society, Providence, 1994.
- [We] H.F. Weinberger: *An example of blowup produced by equal diffusions*, J. Differential Equations **154** (1999), 225–237.
- [Xi1] J. Xin: *Multidimensional stability of traveling waves in a bistable reaction-diffusion equation. I*, Comm. Partial Differential Equations **17** (1992), 1889–

1899.

- [Xi2] J. Xin: *Front propagation in heterogeneous media*, SIAM Rev. **42** (2000), 161–230.
- [Ya] H. Yagisita: *Nearly spherically symmetric expanding fronts in a bistable reaction-diffusion equation*, J. Dynam. Differential Equations **13** (2001), 323–353.
- [Ze] T.I Zelenyak: *Stabilization of solutions of boundary value problems for a second order parabolic equation with one space variable*, Differential Equations (transl. from *Differencialnye Uravnieva*) **4** (1968), 17–22.