Équations de la mécanique des fluides

Isabelle Gallagher Thierry Gallay

Résumé

Dans ce cours nous nous proposons de présenter quelques résultats mathématiques en mécanique des fluides, en nous concentrant sur les équations de Navier-Stokes posées dans l'espace entier. Nous présenterons les résultats classiques sur le problème de Cauchy, en insistant particulièrement sur l'étude du tourbillon en deux dimensions d'espace. La deuxième partie du cours sera consacrée à des résultats plus récents, dans le cadre d'un tourbillon initial mesure : problème de Cauchy, et convergence en temps grand vers les vortex d'Oseen.

Table des matières

1 Présentation des équations d'Euler et de Navier-Stokes

Nous nous proposons dans ce cours d'offrir une présentation de quelques aspects de la théorie mathématique des équations d'Euler et de Navier-Stokes dans l'espace à deux ou à trois dimensions. L'étude mathématique de ces équations remonte au début du vingtième siècle, et nous nous efforcerons de donner une idée des grandes étapes qui ont jalonné l'histoire de l'étude de ces équations, jusqu'à une époque très récente.

1.1 Les équations

Commençons par présenter le système d'équations considéré. On s'intéresse à l'évolution au cours du temps d'un fluide, *via* l'étude de son champ de vitesses en tout point de l'espace et à chaque instant : la formulation choisie est donc une formulation eulérienne, contrairement à une formulation lagrangienne où l'on chercherait à décrire plutôt la position de chaque particule de fluide à chaque instant.
Nous supposons que le fluide est de densité ρ constante, qu'il est incompressible (l'espace occupé par une certaine quantité de fluide à chaque instant peut changer de forme, mais pas de volume), et l'on supposera suivant les cas qu'il est visqueux ou non (dans le cas d'une viscosité ν strictement positive il s'agira d'un fluide obéissant aux équations dites de Navier-Stokes, alors que si la viscosité est nulle il s'agira des équations d'Euler).
Dans ce cours nous choisissons de porter notre attention plutôt sur les équations de Navier-Stokes – même s'il faut souligner que la théorie mathématique des équations d'Euler est au moins aussi riche que celle des équations de Navier-Stokes ; ce choix est plutôt dicté par un goût personnel. À la fin du paragraphe portant sur le problème de Cauchy (le paragraphe 2 ci-dessous) nous indiquerons néanmoins quel type de résultat peut être démontré pour les équations d'Euler.

Décrivons à présent les équations considérées : le champ de vitesses (inconnu) du fluide est un vecteur à d composantes en dimension d d'espace, dépendant du temps $t \geq 0$ et de la variable d'espace $x \in \mathbb{R}^d$. L'incompressibilité du fluide se traduit en langage eulérien par le fait que ce champ est de divergence nulle pour tout temps. Les équations de Navier-Stokes s'écrivent alors

$$\left\{\begin{array}{rcl} \rho(\partial_t u + u \cdot \nabla u) - \mu \Delta u & = & -\nabla \widetilde{p} + \widetilde{f} \\ \operatorname{div} u & = & 0. \end{array}\right.$$

Dans ce système u est le champ de vitesses du fluide, $\widetilde{p}$ est sa pression, et $\widetilde{f}$ représente l'ensemble des forces extérieures agissant sur le fluide. On a noté

$$u \cdot \nabla u = \sum_{j=1}^{d} u^j \partial_j u,$$

où $u = (u^1, \ldots, u^d)$. Comme ρ est constant on peut redéfinir une viscosité cinématique $\nu \stackrel{\text{déf}}{=} \mu/\rho$, une nouvelle pression $p = \widetilde{p}/\rho$ et une nouvelle source $f = \widetilde{f}/\rho$ pour obtenir les équations de Navier-Stokes

$$(NS) \qquad \left\{\begin{array}{rcl} \partial_t u + u \cdot \nabla u - \nu \Delta u & = & -\nabla p + f \\ \operatorname{div} u & = & 0. \end{array}\right.$$

Notons que si le fluide est supposé évoluer dans un domaine $\mathcal{O}$, il convient de rajouter des conditions aux limites à ce système, par exemple les conditions de non glissement $u_{|\partial\mathcal{O}} = 0$. Nous ne considérerons pas cette éventualité dans ce cours. En outre pour simplifier l'exposition nous supposerons dans la suite que les forces extérieures sont nulles.

Nous ne chercherons pas à présenter le travail de modélisation qui conduit à ces équations : autant le système d'Euler peut s'obtenir par un principe de minimisation d'une action (la fonctionnelle d'énergie cinétique et potentielle), autant le système de Navier-Stokes n'est pas aussi facile à justifier. Aussi nous nous contenterons dans ce cours d'en faire une étude mathématique, sans en justifier l'origine.

Le système de Navier-Stokes est donc un système d'équations aux dérivées partielles non linéaires d'évolution, portant sur la vitesse et la pression du fluide. Avant d'entamer l'étude mathématique de ce système, discutons un instant des inconnues (vitesse et pression). La présence de $-\nabla p$ dans le membre de droite de (NS) assure que la divergence de u reste nulle au cours du temps : en prenant la divergence de la première équation dans (NS), on s'aperçoit en effet sans peine que la pression est reliée au champ de vitesses par l'équation de Poisson

$$-\Delta p = \mathrm{div}\,(u \cdot \nabla u). \tag{1}$$

Cette équation de Poisson peut être résolue par exemple de la manière suivante : on remarque que

$$u \cdot \nabla u = \sum_j \partial_j (u^j u),$$

du fait de l'incompressibilité. Dès lors (1) peut s'écrire aussi

$$-\Delta p = \sum_{j,k} \partial_j \partial_k (u^j u^k)$$

ou encore

$$p = (-\Delta)^{-1} \sum_{j,k} \partial_j \partial_k (u^j u^k).$$

Nous pouvons alors définir le projecteur de Leray

$$\mathbf{P} = \mathrm{Id} - \nabla \Delta^{-1} \mathrm{div}$$

et considérer le système suivant, qui est équivalent à (NS) et qui ne porte plus que sur le champ de vitesses (de divergence nulle)

$$\partial_t u + \mathbf{P}(u \cdot \nabla u) - \nu \Delta u = 0.$$

Le terme non linéaire de ce système, outre qu'il présente une dérivée, apparaît donc accompagné d'un opérateur pseudo-différentiel non local, le projecteur de Leray. Ce projecteur s'exprime particulièrement bien en variables de Fourier : si l'on note par $\widehat{f}$ la transformée de Fourier d'une distribution tempérée f, définie par

$$\widehat{f}(\xi) \stackrel{\text{déf}}{=} \int e^{-ix\cdot\xi} f(x)\, dx,$$

alors dans l'espace de Fourier l'opérateur $\widehat{\mathbf{P}}$ est une matrice dont les coefficients $\widehat{\mathbf{P}}_{ij}$ sont donnés par

$$\widehat{\mathbf{P}}_{ij} = \delta_{ij} - \frac{\xi_i \xi_j}{|\xi|^2}$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker. Ses coefficients étant bornés dans l'espace de Fourier, il est facile de voir que le projecteur de Leray $\mathbf{P}$ est continu sur les espaces de Sobolev H^s ; en revanche, le fait qu'il est continu sur L^p pour tout $p \in]1, +\infty[$ est un résultat difficile d'analyse harmonique (que nous admettrons).

Notons enfin que dans cette dernière formulation du système de Navier-Stokes, la pression a disparu ; ainsi dans la suite de ce cours nous ne considèrerons plus la pression comme une inconnue du système. Le problème de Cauchy que nous chercherons à résoudre sera donc le suivant : étant donné un champ de vecteurs de divergence nulle u_0, y a-t-il une solution u au système de Navier-Stokes qui coïncide avec u_0 au temps $t = 0$? Cette solution est-elle unique ? Quel est son temps maximal d'existence ? De quelles propriétés sur la donnée initiale hérite-t-elle ? Une fois le champ de vitesses u obtenu, la pression se retrouvera par l'équation de Poisson (1).

1.2 Changement d'échelle

Quand les équations sont posées dans l'espace entier, il est toujours possible de définir des grandeurs adimensionnées en remplaçant x, t, u et p par les quantités suivantes (où L est une longueur)

$$\frac{x}{L}, \quad \frac{\nu t}{L^2}, \quad \frac{Lu}{\nu}, \quad \frac{L^2 p}{\nu^2}.$$

Ainsi la viscosité ν devient égale à 1 et les équations s'écrivent alors

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t u + u \cdot \nabla u - \Delta u & = & -\nabla p \\ \operatorname{div} u & = & 0, \end{array} \right.$$

ou encore

$$\partial_t u + \mathbf{P}(u \cdot \nabla u) - \Delta u = 0.$$

Notons qu'en écrivant les équations de cette manière nous nous interdisons d'étudier la limite de faible viscosité (passage de Navier-Stokes vers Euler) ; il faudrait bien sûr remettre les équations à la bonne échelle pour une telle étude.

1.3 Propriétés fondamentales

Dans ce paragraphe nous allons procéder à une étude formelle de ces équations, afin de dégager quelques caractéristiques qui nous guideront plus tard dans l'étude du problème de Cauchy. Ces caractéristiques sont de deux sortes : l'invariance par changement d'échelle, et la conservation de l'énergie.

1.3.1 Invariance d'échelle

Soit u_0 un champ de vecteurs de divergence nulle et supposons qu'il existe un champ de vecteurs u, solution du système de Navier-Stokes de donnée initiale u_0. Un calcul facile montre que si l'on définit, pour $\lambda > 0$, le champ

$$u_{0,\lambda} = \lambda u_0(\lambda \cdot),$$

alors le champ de vecteurs u_λ défini par

$$u_\lambda(t, x) = \lambda u(\lambda^2 t, \lambda x)$$

est solution associée à $u_{0,\lambda}$. Notons que la pression p est transformée en $p_\lambda(t, x) = \lambda^2 p(\lambda^2 t, \lambda x)$. La transformation $u \mapsto u_\lambda$ s'appelle le changement d'échelle laissant invariante l'équation (exercice : pour le système de Navier-Stokes il n'y a pas d'autre changement du type $\lambda^\alpha u(\lambda^\beta t, \lambda^\gamma x)$).

Quand il s'agira de chercher des espaces fonctionnels où choisir la donnée initiale pour résoudre le système, il sera donc naturel de choisir cet espace fonctionnel parmi l'ensemble des espaces invariants sous la transformation $u_0 \mapsto u_{0,\lambda}$, c'est-à-dire parmi l'ensemble des espaces fonctionnels pour lesquels cette transformation est une isométrie. De même on pourra chercher à construire des solutions dans des espaces fonctionnels (de type espace-temps) invariants par la transformation $u \mapsto u_\lambda$.

1.3.2 Égalité d'énergie

L'énergie cinétique du fluide à l'instant t est la quantité

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^d} |u(t,x)|^2\,dx = \frac{1}{2}\|u(t)\|_{L^2}^2.$$

Montrons que cette quantité est décroissante en temps (si la viscosité est nulle elle sera constante). Nous noterons dans la suite par $(\cdot|\cdot)$ le produit scalaire de deux fonctions dans L^2. Pour ne pas alourdir les notations nous garderons cette notation pour le produit scalaire dans L^2 de deux champs de vecteurs. De même nous dirons qu'un champ de vecteurs est dans L^2 (ou tout autre espace fonctionnel) si toutes ses composantes sont dans cet espace. Enfin nous omettrons dans le calcul qui suit de préciser la dépendance en temps pour alléger les notations. On peut donc écrire (` à condition que le champ u soit assez régulier pour donner un sens aux expressions ci-dessous)

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= (u \mid \partial_t u)\\ &= -(u \mid \mathbf{P}(u\cdot\nabla u)) + (u \mid \Delta u).\end{aligned}$$

Le projecteur de Leray est un projecteur orthogonal dans L^2, et comme u est de divergence nulle, on a

$$(u \mid \mathbf{P}(u\cdot\nabla u)) = (u \mid u\cdot\nabla u).$$

Par intégration par parties on peut écrire

$$\begin{aligned}(u \mid u\cdot\nabla u) &= \sum_{(j,k)\in\{1,\dots,d\}^2} (u^j \mid u^k\partial_k u^j)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{k\in\{1,\dots,d\}} \int_{\mathbf{R}^d} u^k\partial_k|u|^2\,dx\\ &= -\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^d} (\operatorname{div} u)|u|^2\,dx = 0\end{aligned}$$

puisque u est de divergence nulle. Le terme non linéaire du système de Navier-Stokes est donc antisymétrique dans L^2, en toute dimension d'espace.
Finalement en intégrant par parties le terme $(u \mid \Delta u)$ il vient

$$\frac{dE}{dt} + \|\nabla u\|_{L^2}^2 = 0,$$

d'où la décroissance de $E(t)$ en temps, ainsi que l'égalité d'énergie

$$\forall t\geq 0,\quad \frac{1}{2}\|u(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\nabla u(t')\|_{L^2}^2\,dt' = \frac{1}{2}\|u_0\|_{L^2}^2. \tag{2}$$

Remarques.
1) Ce calcul n'est pour l'instant qu'un calcul formel, car rien ne justifie les intégrations par parties que nous avons effectuées.

2) La viscosité conduit naturellement à une dissipation de l'énergie. En l'absence de viscosité (et toujours à condition de justifier ces calculs) l'énergie est conservée au cours du temps.

3) L'espace L^2 est un espace naturel dans lequel résoudre le système de Navier-Stokes (ou d'Euler) car c'est l'espace d'énergie.

4) En dimension quelconque, l'espace L^2 est le seul espace dans lequel on puisse écrire (formellement) une telle conservation. L'énergie est donc la seule fonction de Lyapunov connue du système en dimension quelconque. On verra plus loin qu'en dimension deux il existe bien d'autres quantités conservées (il en existe une infinité).

5) L'égalité d'énergie (2) nous fournit "gratuitement" un effet régularisant. Si la donnée initiale est dans L^2 (et toujours sous réserve de justifier les calculs), alors la solution reste dans L^2, et est en outre dans H^1 pour presque tout temps. Plus précisément l'espace d'énergie de la solution est donc

$$\mathcal{E}_t = L^\infty([0,t]\,;L^2(\mathbf{R}^d)) \cap L^2([0,t]\,;\dot{H}^1(\mathbf{R}^d)),$$

où la norme dans $\dot{H}^1(\mathbf{R}^d)$ est définie par

$$\|u\|_{\dot{H}^1} = \|\nabla u\|_{L^2}.$$

1.4 Le tourbillon

Une quantité joue un rôle fondamental dans la description du mouvement d'un fluide : il s'agit du "tourbillon", qui n'est autre que le rotationnel du champ de vitesses. C'est un vecteur à d composantes en dimension d d'espace. Dans $\mathbf{R}^3$ par exemple on a

$$\Omega = \mathrm{rot}\, u = \begin{pmatrix} \partial_2 u^3 - \partial_3 u^2 \\ \partial_3 u^1 - \partial_1 u^3 \\ \partial_1 u^2 - \partial_2 u^1 \end{pmatrix}.$$

En dimension deux on notera le tourbillon par $\omega = \partial_1 u^2 - \partial_2 u^1$. Il peut être commode de considérer ω comme un vecteur tridimensionnel, dont seule la troisième composante est non nulle, et vaut précisément $\partial_1 u^2 - \partial_2 u^1$.

Si nous prenons le rotationnel de l'équation de Navier-Stokes (ce qui est une autre façon d'éliminer le gradient de pression de l'équation) on obtient l'équation du tourbillon

$$\partial_t \Omega + u \cdot \nabla \Omega - \Omega \cdot \nabla u - \Delta \Omega = 0.$$

En dimension deux d'espace cette équation se simplifie en l'équation de transport-diffusion suivante

$$\partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega - \Delta \omega = 0.$$

On note l'absence du terme dit de "stretching" $-\Omega \cdot \nabla u$ dans l'équation, qui a des conséquences très importantes, comme nous le verrons ci-dessous.
Ces équations sont bien entendu toujours non linéaires (et le terme non linéaire contient un opérateur pseudo-différentiel non local, tout comme le système de Navier-Stokes d'origine) et le champ de vitesse s'obtient à partir du rotationnel par la loi suivante, dite de Biot et Savart :

$$u = \mathrm{rot}\,(E \star \Omega)$$

où E est la solution fondamentale du Laplacien. En dimension deux d'espace la loi de Biot-Savart s'écrit

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}^2} \frac{(x-y)^\perp}{|x-y|^2} \omega(y)\, dy,$$

avec $x^\perp = (-x_2, x_1)$, alors qu'en dimension trois on a

$$u(x) = -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbf{R}^2} \frac{x-y}{|x-y|^3} \wedge \Omega(y)\, dy.$$

Comme dans le cas du projecteur de Leray, on peut démontrer (nous l'admettrons) la continuité $L^p \to L^q$ suivante :

$$\|u\|_{L^p(\mathbf{R}^d)} \leq C\|\mathrm{rot}\, u\|_{L^q(\mathbf{R}^d)} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{d} \quad \text{et} \quad 1 < q < p < \infty. \tag{3}$$

Cette estimation découle des inégalités de Hardy-Littlewood-Sobolev (voir par exemple [39], page 354 ou [24], page 117).

L'équation du tourbillon est particulièrement intéressante en dimension deux d'espace. Comme u est de divergence nulle, cette équation vérifie par exemple le principe du maximum, et toutes les normes L^p du tourbillon sont contrôlées par la norme L^p de la donnée initiale. Dans le cas sans viscosité il s'agit tout simplement d'un système hamiltonien. Nous aurons l'occasion de revenir plus longuement sur cette équation dans le paragraphe 3. Notons en particulier l'estimation d'enstrophie suivante, qui s'obtient comme dans le cas de l'égalité d'énergie, par une intégration par parties utilisant l'incompressibilité :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\omega(t)\|^2_{L^2(\mathbf{R}^2)} + \|\nabla\omega(t)\|^2_{L^2(\mathbf{R}^2)} = 0,$$

ce qui donne

$$\forall t \geq 0, \quad \|\omega(t)\|^2_{L^2(\mathbf{R}^2)} + 2\int_0^t \|\nabla\omega(t')\|^2_{L^2(\mathbf{R}^2)}\, dt' = \|\omega_0\|^2_{L^2(\mathbf{R}^2)}.$$

Du point de vue du champ de vitesses, cela signifie que la norme $\dot{H}^1(\mathbf{R}^2)$ de la vitesse est contrôlée pour tout temps.
Dans le cas à symétrie radiale en deux dimensions d'espace où $\omega(t,x) = \widetilde{\omega}(t,|x|)$, on remarque que $u \cdot \nabla\omega = 0$. Ainsi le terme non linéaire disparaît de l'équation, et Navier-Stokes devient une simple équation de la chaleur

$$\partial_t\omega - \Delta\omega = 0.$$

1.5 Références et remarques

La première description mathématique du mouvement d'un fluide parfait est due à L. Euler en 1755 [13]. En 1822 Navier [34] propose de modifier ces équations pour y inclure les effets de friction, en incorporant le Laplacien (et justifiant cette modification par des arguments théoriques). La présence de ce terme de friction est ensuite clarifiée par Stokes [40] en 1845. Bien d'autres modèles ont été développés depuis, pour prendre en compte des caractéristiques physiques de différents fluides : modèles compressibles, modèles inhomogènes, modèles non isentropiques... nous n'en dirons pas plus ici, mais renvoyons par exemple à [30, 31] pour une présentation de quelques modèles classiques.
La justification des équations d'Euler par minimisation de la fonctionnelle énergie peut être trouvée par exemple dans [8].

2 Le problème de Cauchy

Dans ce paragraphe nous nous proposons de présenter quelques-uns des résultats les plus importants concernant le problème de Cauchy pour le système de Navier-Stokes en dimension quelconque. Nous ne prétendons nullement à l'exhaustivité sur cette question mais souhaitons simplement donner une idée des différentes méthodes employées couramment pour répondre aux questions de l'existence et de l'unicité des solutions.

Il y a essentiellement deux théories pour le problème de Cauchy, qui correspondent aux deux caractéristiques évoquées dans le paragraphe précédent : la théorie de Leray de "solutions faibles" repose sur la conservation de l'énergie, alors que la théorie de Kato sur les "solutions fortes" s'appuie sur l'invariance d'échelle. Ces deux techniques sont présentées dans les paragraphes 2.1 et 2.2 respectivement. Dans le cas de la dimension deux on peut unifier les deux théories : cela est évoqué au paragraphe 2.3. Enfin une brève discussion sur les équations d'Euler figure au paragraphe 2.4.

2.1 Solutions faibles à la Leray

Nous allons donner dans ce paragraphe des éléments de démonstration du théorème suivant.

Théorème 2.1 *Soit u_0 un champ de vecteurs de divergence nulle, élément de $L^2(\mathbf{R}^d)$. Alors il existe une solution u des équations de Navier-Stokes associée à la donnée initiale u_0, telle que $u \in \mathcal{E}_t$ pour tout $t \geq 0$, et vérifiant l'inégalité d'énergie suivante :*

$$\forall t \geq 0, \quad \frac{1}{2}\|u(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\nabla u(t')\|_{L^2}^2 \, dt' \leq \frac{1}{2}\|u_0\|_{L^2}^2.$$

Il faut comprendre la notion de "solution" au sens des distributions ici : cela signifie que pour tout champ de vecteurs de divergence nulle $\psi \in C^1(\mathbf{R}^+, H^1(\mathbf{R}^d))$, on a

$$(u(t) \mid \psi(t)) + \int_0^t \Big((\nabla u(t') \mid \nabla\psi(t')) - (u(t') \otimes u(t') \mid \nabla\psi(t')) \Big) \, dt' = (u_0 \mid \psi(0)) + \int_0^t (u(t') \mid \partial_{t'}\psi(t')) \, dt'.$$

Une partie de la démonstration du théorème ci-dessus consiste en la justification de l'existence du terme $\displaystyle\int_0^t (u(t') \otimes u(t') \mid \nabla\psi(t')) \, dt'$, sous la seule hypothèse que u appartient à $\mathcal{E}_t$.

Donnons à présent le principe de la démonstration de ce résultat, en dimension deux et trois d'espace. La démarche suit pour l'essentiel une démonstration du théorème de Peano pour les équations différentielles ordinaires : on commence ainsi par se ramener à une équation différentielle ordinaire dans un espace de Banach, en considérant une approximation du système de Navier-Stokes. Si S_n est un opérateur de troncature en fréquences

$$S_n f = \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{1}_{|\cdot| \leq n} \widehat{f}),$$

alors on peut considérer le système approximé

$$\partial_t u_n + S_n \mathbf{P} \mathrm{div}\,(S_n u_n \otimes S_n u_n) - S_n \Delta u_n = 0,$$

avec donnée initiale $u_{n|t=0} = S_n u_0$. Nous allons appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz, dans $S_n L^2(\mathbf{R}^d)$. L'équation ci-dessus s'écrit en effet sous la forme

$$\partial_t u_n = F(u_n)$$

et l'on constate facilement que F est continue (et localement lipschitzienne) dans $S_n L^2(\mathbf{R}^d)$. Montrons par exemple la continuité de F. Cette fonction est constituée de deux termes, le terme $S_n \Delta u_n$ et le terme non linéaire $S_n \mathbf{P}\mathrm{div}\,(S_n u_n \otimes S_n u_n)$. Le premier terme est facile à estimer puisque

$$\|S_n \Delta u_n\|_{L^2(\mathbf{R}^d)} \leq C n^2 \|u_n\|_{S_n L^2(\mathbf{R}^d)},$$

par l'hypothèse de localisation en fréquences. Le terme quadratique quant à lui se majore de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \|S_n \mathbf{P}\mathrm{div}\,(S_n u_n \otimes S_n u_n)\|_{L^2(\mathbf{R}^d)} &\leq C n \|S_n u_n \otimes S_n u_n\|_{L^2(\mathbf{R}^d)} \\ &\leq C n \|S_n u_n\|_{L^\infty(\mathbf{R}^d)} \|S_n u_n\|_{L^2(\mathbf{R}^d)}. \end{aligned} \tag{4}$$

On peut écrire

$$\|S_n u_n\|_{L^\infty(\mathbf{R}^d)} \leq C \|\mathcal{F}(S_n u_n)\|_{L^1(\mathbf{R}^d)}$$

où $\mathcal{F}$ dénote la transformée de Fourier. La troncature en fréquence nous permet d'en déduire par l'inégalité de Cauchy-Schwartz que

$$\begin{aligned} \|S_n u_n\|_{L^\infty(\mathbf{R}^d)} &\leq C n^{\frac{d}{2}} \|\mathcal{F}(S_n u_n)\|_{L^2(\mathbf{R}^d)} \\ &\leq C n^{\frac{d}{2}} \|u_n\|_{S_n L^2(\mathbf{R}^d)}. \end{aligned}$$

En joignant cette estimation à (4), la continuité de F dans $L^2(\mathbf{R}^d)$ est démontrée.

On obtient donc une unique solution u_n sur un temps d'existence maximal $[0, T_n^*[$. Cette solution est dans $C^1([0, T_n^*[\,; S_n L^2(\mathbf{R}^d))$. L'estimation d'énergie formelle écrite au paragraphe 1.3.2 est donc justifiée, et fournit en particulier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée dans $\mathcal{E}_t$ pour tout $t \geq 0$. En particulier le temps maximal d'existence est infini, on a $S_n u_n = u_n$, et

$$\forall t \geq 0, \quad \frac{1}{2}\|u_n(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\nabla u_n(t')\|_{L^2}^2 \, dt' \leq \frac{1}{2}\|u_n(0)\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{2}\|u(0)\|_{L^2}^2.$$

De cette suite bornée on peut donc extraire une sous-suite qui converge faiblement vers une limite u dans $L^\infty(\mathbf{R}^+; L^2(\mathbf{R}^d)) \cap L^2(\mathbf{R}^+; \dot{H}^1(\mathbf{R}^d))$, reste à savoir si u est solution du système de Navier-Stokes. Les termes linéaires du système approché convergent bien entendu faiblement vers les bonnes limites, tout le problème consiste maintenant à calculer la limite du terme non linéaire $\int_0^t (u_n(t') \otimes u_n(t') \,|\, \nabla S_n \psi(t'))\, dt'$. Plusieurs ingrédients sont nécessaires ici, le plus important étant un résultat de compacité (afin de justifier un passage à la limite de type fort-faible). La compacité en temps nous est fournie par l'équation, puisque l'on peut en déduire une borne sur $(\partial_t u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, dans un espace de type $L^2(\mathbf{R}^+; H^{-s}(\mathbf{R}^d))$ pour s assez grand. En effet la borne d'énergie fournit par interpolation une borne sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dans $L^4(\mathbf{R}^+; H^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^d))$. En dimension deux, les injections de Sobolev impliquent que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée dans $L^4(\mathbf{R}^+; L^4(\mathbf{R}^2))$, donc $\mathbf{P}(u_n \otimes u_n)$ est bornée dans $L^2(\mathbf{R}^+; L^2(\mathbf{R}^2))$, et enfin $\mathbf{P}(u_n \cdot \nabla u_n) = \mathbf{P}\mathrm{div}\,(u_n \otimes u_n)$ est bornée dans $L^2(\mathbf{R}^+; H^{-1}(\mathbf{R}^2))$. En dimension trois de même, la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée dans $L^4(\mathbf{R}^+; L^3(\mathbf{R}^2))$, donc $\mathbf{P}(u_n \otimes u_n)$ est bornée dans $L^2(\mathbf{R}^+; H^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^3))$, par l'injection continue de $L^{\frac{3}{2}}(\mathbf{R}^3))$ dans $H^{-\frac{1}{2}}$. Enfin on en déduit que $\mathbf{P}(u_n \cdot \nabla u_n) = \mathbf{P}\mathrm{div}\,(u_n \otimes u_n)$ est bornée dans $L^2(\mathbf{R}^+; H^{-\frac{3}{2}}(\mathbf{R}^3))$. Comme $(\Delta u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est clairement bornée dans $L^2(\mathbf{R}^+, H^{-1})$, le résultat suit.

Cela implique un résultat d'équicontinuité en temps de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$. La compacité en espace provient de l'égalité d'énergie, puisque $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée dans $L^2_{loc}(\mathbf{R}^+; H^1(\mathbf{R}^d))$. On remarque alors que pour ce passage à la limite la fonction test ψ peut être choisie à support

compact ; comme pour tout compact K de $\mathbf{R}^d$, l'injection de $H^1(K)$ dans $L^2(K)$ est compacte, on peut appliquer le théorème d'Ascoli et conclure à la convergence forte de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vers u dans $L^2_{loc}(\mathbf{R}^+; L^2_{loc})$.
Pour conclure, il suffit de montrer que $u_n \otimes u_n$ converge fortement dans $L^1_{loc}(\mathbf{R}^+; L^2_{loc})$ vers $u \otimes u$. En remarquant que

$$\|u_n \otimes u_n - u \otimes u\|_{L^1([0,T];L^2)} \leq \|u_n - u\|_{L^2([0,T];L^4)} \left(\|u_n\|_{L^2([0,T];L^4)} + \|u\|_{L^2([0,T];L^4)}\right),$$

il suffit donc de montrer que $u_n - u$ converge fortement vers zéro dans $L^2_{loc}(\mathbf{R}^+; L^4_{loc})$. Ce dernier résultat s'obtient quant à lui par une inégalité de Gagliardo-Nirenberg : pour tout compact K de $\mathbf{R}^d$ on a, si $d = 2$ ou 3,

$$\|u_n - u\|_{L^2([0,T];L^4(K))} \leq C\|u_n - u\|^{1-\frac{d}{4}}_{L^2([0,T]\times K)} \|\nabla(u_n - u)\|^{\frac{d}{4}}_{L^2([0,T]\times K)} \leq C\|u_n - u\|^{1-\frac{d}{4}}_{L^2([0,T]\times K)}$$

et le résultat suit.
Enfin l'inégalité d'énergie est obtenue par passage à la limite faible dans l'égalité d'énergie satisfaite par la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

Remarques.
1) Dans le cas d'un domaine borné on peut reprendre la même démarche en remplaçant l'opérateur de troncature en fréquence S_n par une troncature sur les n premiers vecteurs propres de l'opérateur de Stokes. Pour un domaine quelconque on remplace cette troncature discrète par une troncature spectrale.

2) On ne sait pas démontrer en général que les solutions de Leray vérifient l'égalité d'énergie plutôt qu'une inégalité.

3) Le théorème de Leray ne dit rien sur l'unicité des solutions en général (et la démonstration non plus !). En dimension deux on peut démontrer que ces solutions sont uniques, et c'est une question ouverte en dimension supérieure. La question de l'unicité en général est traitée dans le paragraphe suivant, et nous reviendrons sur le cas particulier de la dimension deux dans le paragraphe 2.3.

2.2 Solutions fortes à la Kato

Dans ce paragraphe nous allons discuter de l'unicité des solutions du système de Navier-Stokes. Il se trouve que la question de l'unicité est liée à l'invariance par changement d'échelle évoquée au paragraphe 1.3.1.
Considérons pour commencer deux solutions "de Leray", c'est-à-dire supposons qu'il existe u et v dans l'espace d'énergie $\mathcal{E}_t$ toutes deux solutions du système de Navier-Stokes avec donnée initiale u_0. Pour montrer que ces deux solutions coïncident, une approche (naïve) consiste à écrire l'équation vérifiée par la différence entre ces deux champs de vecteurs, et à écrire une estimation d'énergie sur $w = u - v$. Formellement on a

$$\partial_t w + \mathbf{P}(u \cdot \nabla w + w \cdot \nabla v) - \Delta w = 0,$$

et une estimation d'énergie formelle donne (en utilisant le fait que u et w sont de divergence nulle)

$$\frac{1}{2}\|w(t)\|^2_{L^2} + \int_0^t \|\nabla w(t')\|^2_{L^2}\, dt' = -\int_0^t (w(t') \cdot \nabla v(t') \mid\ w(t'))\, dt'.$$

Si l'on veut appliquer un lemme de type Gronwall, on peut écrire par exemple que

$$-\int_0^t (w(t') \cdot \nabla v(t') \mid\ w(t'))\, dt' = \int_0^t (w(t') \cdot \nabla w(t') \mid\ v(t'))\, dt'$$

et ainsi en utilisant une inégalité de Hölder on a

$$\frac{1}{2}\|w(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\nabla w(t')\|_{L^2}^2\,dt' \leq \int_0^t \|w(t')\|_{L^2}\|\nabla w(t')\|_{L^2}\|v(t')\|_{L^\infty}\,dt'$$

ou encore

$$\|w(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\nabla w(t')\|_{L^2}^2\,dt' \leq \int_0^t \|w(t')\|_{L^2}^2\|v(t')\|_{L^\infty}^2\,dt'.$$

Ainsi le lemme de Gronwall garantit l'unicité (à condition de justifier ces calculs formels) si l'une des deux solutions (ici v) est dans $L^2(\mathbf{R}^+; L^\infty(\mathbf{R}^d))$. En dimension deux d'espace c'est "presque" le cas puisque $\dot{H}^1(\mathbf{R}^2)$ s'injecte presque dans $L^\infty(\mathbf{R}^2)$ (et de fait un calcul un peu plus astucieux donne le résultat en dimension deux). Par contre en dimension quelconque, l'espace de Sobolev "presque" dans $L^\infty(\mathbf{R}^d)$ est $\dot{H}^{\frac{d}{2}}(\mathbf{R}^d)$. Rappellons au passage la définition des espaces de Sobolev homogènes : pour tout $s \in \mathbf{R}$,

$$\dot{H}^s(\mathbf{R}^d) = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d) \;/\; \widehat{f} \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^d) \text{ et } \|f\|_{\dot{H}^s(\mathbf{R}^d)} = \left(\int_{\mathbf{R}^d} |\xi|^{2s} |\widehat{f}(\xi)|^2\,d\xi \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty \right\}.$$

Par le théorème de Leray seul, il nous manque donc $d/2-1$ dérivées pour l'unicité. Ces dérivées manquantes nous sont en fait données par le changement d'échelle : l'espace de Sobolev invariant par le changement d'échelle $u_0 \mapsto u_{0,\lambda}$ du paragraphe 1.3.1 est précisément $\dot{H}^{\frac{d}{2}-1}(\mathbf{R}^d)$ (exercice !). L'utilisation de l'énergie seule nous a permis de montrer l'existence de solutions, il semble dès lors que c'est l'invariance d'échelle qui nous va nous guider pour trouver une classe d'unicité des solutions.

Il existe bien évidemment un grand nombre d'espaces de Banach invariants par le changement d'échelle $u_0 \mapsto u_{0,\lambda}$, et ce n'est pas notre propos ici d'énoncer tous les théorèmes d'unicité existant dans la littérature dans ces divers cadres fonctionnels (nous renvoyons notamment au paragraphe 2.5 pour des références). Nous allons nous contenter ici de présenter un seul de ces résultats, qui n'est certainement pas le théorème optimal, mais dont la démonstration sert de trame à la plupart des théorèmes d'unicité à ce jour — sa vertu supplémentaire est que les espaces fonctionnels utilisés dans la démonstration de ce résultat nous seront utiles dans la seconde partie de ce cours. L'espace fonctionnel invariant d'échelle dans lequel on choisit la donnée initiale est $L^d(\mathbf{R}^d)$; par les injections de Sobolev on rappelle que $\dot{H}^{\frac{d}{2}-1}(\mathbf{R}^d)$ s'injecte continûment dans $L^d(\mathbf{R}^d)$.

Donnons la démonstration du théorème suivant.

Théorème 2.2 *Il existe une constante ε_0 telle que l'on ait le résultat suivant. Soit u_0 un champ de vecteurs de divergence nulle dans $L^d(\mathbf{R}^d)$. Alors il existe un temps T et une unique solution u associée à u_0 telle que*

$$u \in C([0,T]\,; L^d(\mathbf{R}^d)) \quad et \quad t^{\frac{1}{2}}\|u(t)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^d)} \in L^\infty(]0,T]).$$

En outre si $\|u_0\|_{L^d(\mathbf{R}^d)} \leq \varepsilon_0$, alors la solution est globale et l'on a

$$u \in C_b([0,+\infty[\,; L^d(\mathbf{R}^d)) \quad et \quad t^{\frac{1}{2}}\|u(t)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^d)} \in L^\infty(]0,+\infty[).$$

La démonstration de ce résultat n'est pas du même type que celle du théorème de Leray précédent : si nous reprenons en effet le schéma de la preuve du paragraphe 2.1, les solutions approximées $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont aussi régulières que l'on veut, donc en particulier sont dans $L^d \cap L^\infty(\mathbf{R}^d)$,

mais on n'a aucun contrôle a priori uniforme en n de la norme de u_n dans cet espace. Cette information de régularité est donc perdue lors du passage à la limite.
Pour démontrer le Théorème 2.2, on procède plutôt en appliquant un théorème de point fixe. Le système de Navier-Stokes peut en effet s'écrire sous la forme intégrale suivante

$$u(t) = e^{t\Delta}u_0 + B(u,u)(t), \quad \text{avec} \quad B(u,u)(t) = -\int_0^t e^{(t-t')\Delta}\mathbf{P}\mathrm{div}\,(u(t')\otimes u(t'))\,dt'.$$

Nous utiliserons le lemme de point fixe suivant.

Lemme 2.3 *Soit X un espace de Banach et B un opérateur bilinéaire tel que*

$$\forall (x,y)\in X^2, \quad \|B(x,y)\|_X \leq \gamma \|x\|_X\|y\|_X.$$

Alors pour tout $x_1 \in X$ tel que $4\gamma\|x_1\|_X < 1$, la suite définie par

$$\begin{cases} x^{(0)} & = & 0 \\ x^{(n+1)} & = & x_1 + B(x^{(n)}, x^{(n)}) \end{cases}$$

converge dans X vers l'unique solution de

$$x = x_1 + B(x,x)$$

telle que $2\gamma\|x\|_X < 1$.

La démonstration de ce lemme est classique : on commence par démontrer que la suite $(x^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ est uniformément bornée dans l'espace X, puis l'on démontre la convergence de la série télescopique $\sum \|x^{(n+1)} - x^{(n)}\|_X$, ce qui donne $x = \sum(x^{(n+1)} - x^{(n)})$.

Nous allons appliquer ce lemme à la formulation intégrale ci-dessus. Définissons l'espace de Banach suivant, qui jouera le rôle de l'espace X du Lemme 2.3 :

$$\forall p \in [1,+\infty], \quad Y_{p,T} = \left\{ f \in L^\infty_{loc}(]0,T]; L^p(\mathbf{R}^d)) \Big/ t^{\frac{1}{2}(1-\frac{d}{p})}\|f(t)\|_{L^p(\mathbf{R}^d)} \in L^\infty(]0,T]) \right\}.$$

Démontrons la proposition suivante.

Proposition 2.4 *Soient p, q et r trois réels dans $[d,+\infty]$, tels que*

$$p < +\infty \quad \text{et} \quad \frac{1}{r} \leq \frac{2}{p} < \frac{1}{d} + \frac{1}{r}\cdot$$

Il existe des constantes C_0 et C_1 telles que pour tous les champs de vecteurs f dans $L^d(\mathbf{R}^d)$, on ait les inégalités suivantes : pour tout $T \geq 0$ et tout u dans $Y_{p,T}$

$$\|e^{t\Delta}f\|_{Y_{q,T}} \leq C_0\|f\|_{L^d(\mathbf{R}^d)}, \quad \text{et} \quad \|B(u,u)(t)\|_{Y_{r,T}} \leq C_1\|u\|^2_{Y_{p,T}}.$$

Enfin on a

$$\text{si } q \in]1,+\infty], \text{ alors} \quad \lim_{t\to 0} t^{\frac{1}{2}(1-\frac{d}{q})}\|e^{t\Delta}f\|_{L^q(\mathbf{R}^d)} = 0. \qquad (5)$$

Pour démontrer cette proposition, il nous faut comprendre l'action du noyau de la chaleur sur les espaces de Lebesgue. On a le résultat suivant.

Lemme 2.5 *Soient deux réels p et q tels que $1 \leq q \leq p \leq +\infty$, et soit un entier $k \in \mathbf{N}$. Alors il existe une constante C telle que pour tout $t > 0$ et tout champ de vecteurs $f \in L^q(\mathbf{R}^d)$, on a*

$$\|e^{t\Delta} f\|_{L^p(\mathbf{R}^d)} \leq \frac{C}{t^{\frac{d}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})}} \|f\|_{L^q(\mathbf{R}^d)}$$
$$\textit{et} \quad \sup_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha e^{t\Delta} f\|_{L^p(\mathbf{R}^d)} \leq \frac{C}{t^{\frac{k}{2}+\frac{d}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})}} \|f\|_{L^q(\mathbf{R}^d)}.$$

La démonstration de ce résultat repose sur la formule explicite du noyau de la chaleur : on a ainsi

$$e^{t\Delta} f = G(t) \star f, \quad \text{avec} \quad G(t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

et le résultat suit par l'inégalité de Young.

De ce lemme on obtient directement la première inégalité de la Proposition 2.4. La limite quand t tend vers zéro découle d'un simple argument d'approximation de f par une fonction régulière, donc il ne reste plus qu'à démontrer l'estimation sur le terme non linéaire.
On a d'une part pour tout couple de réels (r, p), tels que $1/r \leq 2/p$, par le lemme précédent (et en commutant $e^{(t-t')\Delta}\mathbf{P}$ et div),

$$\left\| \int_0^t e^{(t-t')\Delta} \mathbf{P} \mathrm{div}\, (u(t') \otimes u(t'))\, dt' \right\|_{L^r(\mathbf{R}^d)} \leq C \int_0^t \frac{1}{(t-t')^{\frac{1}{2}+\frac{d}{2}(\frac{2}{p}-\frac{1}{r})}} \|\mathbf{P}(u(t') \otimes u(t'))\|_{L^{\frac{p}{2}}(\mathbf{R}^d)}\, dt'.$$

Le projecteur de Leray étant continu sur $L^d(\mathbf{R}^d)$, une inégalité de Hölder donne alors

$$\left\| \int_0^t e^{(t-t')\Delta} \mathbf{P}\ \mathrm{div}\, (u(t') \otimes u(t'))\, dt' \right\|_{L^r(\mathbf{R}^d)} \leq C \int_0^t \frac{1}{(t-t')^{\frac{1}{2}+\frac{d}{2}(\frac{2}{p}-\frac{1}{r})}} \|u(t')\|^2_{L^p(\mathbf{R}^d)}\, dt'.$$

Ce calcul permet d'obtenir l'estimation suivante sur B : on obtient

$$\begin{aligned} t^{\frac{1}{2}(1-\frac{d}{r})} \|B(u,u)(t)\|_{L^r(\mathbf{R}^d)} &\leq Ct^{\frac{1}{2}(1-\frac{d}{r})} \|u\|^2_{Y_{p,t}} \int_0^t \frac{dt'}{(t-t')^{\frac{1}{2}+\frac{d}{2}(\frac{2}{p}-\frac{1}{r})} t'^{1-\frac{d}{p}}}\, dt' \\ &\leq C\|u\|^2_{Y_{p,t}}, \end{aligned}$$

dès que $d < p < +\infty$, où C ne dépend pas de t. On a donc obtenu

$$\|B(u,u)\|_{Y_{r,T}} \leq C_1 \|u\|^2_{Y_{p,T}}, \tag{6}$$

avec C_1 indépendant de T. Cela achève la démonstration de la proposition.

Une fois cette proposition obtenue, nous allons pouvoir conclure la démonstration du théorème. Tout d'abord en appliquant le lemme de point fixe 2.3, on peut démontrer l'existence et l'unicité de la solution dans $Y_{p,t}$ pour $p \in]d, \infty[$. En effet le terme non linéaire $B(u,u)$ est bicontinu dans $Y_{p,t}$ pour $p \in]d, \infty[$, par application de la proposition précédente avec $r = p$. Par le Lemme 2.3, l'existence et l'unicité de la solution dans $Y_{p,T}$ sont garantis si

$$4C_1 \|e^{t\Delta} u_0\|_{Y_{p,T}} < 1. \tag{7}$$

Considérons d'abord le cas où la donnée initiale est petite : on suppose que $\|u_0\|_{L^d(\mathbf{R}^d)} \leq \varepsilon_0$ où ε_0 est à déterminer. Alors par la proposition 2.4, on a

$$\|e^{t\Delta} u_0\|_{Y_{p,T}} \leq C_0 \varepsilon_0,$$

et donc par le Lemme 2.3, on a existence et unicité de la solution dans $Y_{p,T}$, pour $p \in]d, \infty[$ et pour tout $T > 0$, si

$$4C_0C_1\varepsilon_0 < 1. \tag{8}$$

En choisissant donc ε_0 pour que (8) aie lieu, on obtient une unique solution dans $Y_{p,T}$ pour tout $T > 0$. En outre la norme de u est contrôlée uniformément en T dans cet espace, par $1/(2C_0C_1)$.

Dans le cas où la donnée initiale n'est pas petite, la condition (7) n'est plus automatiquement vérifiée pour tout T. En revanche on peut utiliser le troisième résultat de la Proposition 2.4 : la limite (5) permet d'affirmer qu'il existe un temps t_0 tel que

$$4C_1\|e^{t\Delta}u_0\|_{Y_{p,t_0}} < 1.$$

On peut donc conclure à l'existence et à l'unicité de la solution dans Y_{p,t_0}, ce qu'il est le résultat souhaité. Pour terminer la démonstration du théorème, il faut encore vérifier que la solution ainsi construite appartient à l'espace $C([0,T];L^d) \cap Y_{\infty,T}$. Pour ce faire on rappelle que

$$u(t) = e^{t\Delta}u_0 + B(u,u)(t),$$

et il suffit donc de montrer que dès que $u \in Y_{p,T}$ pour $p \in]d, +\infty[$, alors $e^{t\Delta}u_0$ et $B(u,u)(t)$ sont dans $C([0,T];L^d) \cap Y_{\infty,T}$. Mais ces résultats sont des conséquences directes de la Proposition 2.4 : pour $e^{t\Delta}u_0$ c'est évident, et pour $B(u,u)(t)$ il suffit de choisir $r = d$ et $p = 2d$ par exemple dans le premier cas, et $r = +\infty$ et $p > 2d$ dans le second. Nous omettons de démontrer la continuité en zéro, qui découle simplement du théorème de Lebesgue.

Le Théorème 2.2 est démontré.

Remarques.
1) Si la donnée initiale n'est pas petite, on ne sait pas démontrer l'existence globale et l'unicité de solutions. Le temps d'explosion (s'il existe) T^* dépend en particulier de toute la donnée initiale, et pas seulement de sa norme dans $L^d(\mathbf{R}^d)$. On peut montrer que si ce temps est fini, alors toutes les normes L^p de la solution pour $p \geq 3$ (en dimension trois d'espace) tendent vers l'infini au temps T^*. C'est assez naturel pour $p > 3$, c'est un résultat difficile si $p = 3$.

2) La démonstration présentée ci-dessus n'utilise en rien la structure spéciale de l'équation (en particulier elle n'utilise pas l'estimation d'énergie), et ainsi le Théorème 2.2 est vrai pour une grande classe d'équations ou de systèmes non linéaires (y compris pour des équations pour lesquelles on sait démontrer l'explosion en temps fini des solutions).

3) On peut chercher à rassembler les Théorèmes 2.1 et 2.2. On peut ainsi démontrer que s'il existe une solution de Leray associée à une donnée $u_0 \in L^2(\mathbf{R}^d)$ qui appartient en plus à $L^\infty([0,T];L^d(\mathbf{R}^d))$, alors c'est le cas de toutes les solutions de Leray associées à u_0, qui coïncident alors sur l'intervalle de temps $[0,T]$ (c'est de "l'unicité fort-faible"). En outre elles vérifient alors l'égalité d'énergie sur $[0,T]$.

4) Si u est une solution de Leray dans $\mathbf{R}^3$, alors elle appartient à $L^4(\mathbf{R}^+;\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^3))$ par interpolation. Elle est donc pour presque tout temps dans $\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^3)$, donc dans $L^3(\mathbf{R}^3)$. En grand temps elle est même petite dans $L^3(\mathbf{R}^3)$. On peut montrer en fait que les solutions de Leray sont régulières pour tous les temps en dehors d'un ensemble borné, de mesure de Hausdorff 1/2 nulle.

5) Si la donnée initiale est dans $L^2 \cap L^3(\mathbf{R}^3)$ et si l'on peut lui associer une unique solution globale dans $L^3(\mathbf{R}^3)$, alors cette solution tend nécessairement vers zéro en grand temps, par

l'argument du 4) ci-dessus. Ce résultat est en fait vrai même si la solution n'est pas d'énergie finie.

6) Le plus grand espace fonctionnel dans lequel un théorème comme le Théorème 2.2 est connu est BMO^{-1} (pour des données petites ; pour des grandes données il faut se restreindre à l'adhérence des fonctions régulières, pour pouvoir garantir un résultat du type de (5)). On connait aussi ce théorème dans les espaces de Besov invariants d'échelle. Tous ces espaces ont pour intérêt notamment de contenir des données initiales homogènes.

2.3 Le cas particulier de la dimension deux

Nous allons dans ce court paragraphe revenir au cas de la dimension deux d'espace : on remarque que dans $\mathbf{R}^2$, l'espace d'énergie $L^2(\mathbf{R}^2)$ est en fait aussi un espace invariant par changement d'échelle. Ainsi en mettant bout-à-bout les théorèmes de Leray et de Kato on démontre sans peine l'existence globale et l'unicité de solutions dans l'espace d'énergie, qui vérifient en outre l'égalité d'énergie.
On peut en fait démontrer l'existence globale et l'unicité de solutions dans BMO^{-1} aussi (plus précisément dans l'adhérence des fonctions régulières pour la norme dans BMO^{-1}), mais c'est beaucoup moins immédiat. Dans la suite de ce cours nous restreindrons notre attention précisément au cas de la dimension deux, dans le cas de solutions d'énergie infinie.

2.4 Remarques sur les équations d'Euler

On peut se demander ce qui demeure des résultats précédents si l'on considère les équations d'Euler plutôt que les équations de Navier-Stokes, c'est-à-dire que l'on suppose que la viscosité est nulle.
Le cadre des solutions faibles est beaucoup moins favorable dans ce cas. En effet s'il est toujours possible de construire une famille de solutions approchées régulières, par le même schéma, le passage à la limite dans les termes non linéaires paraît bien plus problématique, puisqu'on ne dispose d'aucun effet régularisant. Des théorèmes d'existence de solutions faibles existent néanmoins en dimension deux d'espace, notamment un théorème de J.-M. Delort [11] pour un tourbillon initial dans H^{-1}, dont la partie singulière est signée. La notion même de solution faible pour le système d'Euler n'est pas claire. En effet la notion la plus faible possible (solution au sens des distributions) n'est physiquement pas raisonnable dans la mesure où A. Shnirelman [38] (voir aussi V. Scheffer [37]) a montré l'existence de telles solutions, dont le support en temps est compact ! En dimension trois la situation est encore moins satisfaisante puisqu'on ne sait pas montrer l'existence de solutions faibles.

Concernant les solutions régulières, il est toujours possible de considérer le système d'Euler comme un système de type hyperbolique non linéaire, et les théorèmes classiques dans ce cadre s'appliquent. Ainsi si la donnée initiale est dans $H^s(\mathbf{R}^d)$ avec $s > d/2+1$ alors il existe une unique solution, sur un temps fini a priori. En dimension deux on peut montrer que les solutions fortes sont globales. On rappelle par exemple le théorème de Yudovitch [42] : dès que le tourbillon initial est $L^\infty \cap L^2(\mathbf{R}^2)$ alors il y a une unique solution globale en temps.

Pour plus d'informations sur le système d'Euler on pourra consulter [8] et les références s'y trouvant, ainsi que [32] ou [41].

2.5 Références et remarques

Nous avons présenté dans cette partie quelques éléments de la théorie du problème de Cauchy pour le système de Navier-Stokes. Pour plus d'informations générales nous renvoyons le lecteur intéressé à [6], [9], [26] par exemple.

La démonstration orginale du théorème de Leray peut être trouvée dans [27] — la lecture de cet article est recommandée, on y trouve non seulement une démonstration de l'existence de solutions faibles, mais aussi une discussion sur les solutions régulières (avec en particulier la démonstration d'un résultat d'existence globale et d'unicité pour $\|u_0\|_{L^2(\mathbf{R}^3)}\|\nabla u_0\|_{L^2(\mathbf{R}^3)}$ petit, ce qui est très proche d'une petite norme $\dot{H}^{\frac{1}{2}}$!), l'unicité fort-faible, le comportement possible à l'explosion... Le cas bidimensionnel figure dans [28].

Concernant la méthode de Kato, le premier résultat dans ce sens est dû à Fujita et Kato [14], dans l'espace $\dot{H}^{\frac{d}{2}-1}(\mathbf{R}^d)$. Le théorème dans $L^d(\mathbf{R}^d)$ figure dans [25]. Récemment l'unicité dans l'espace $C([0,T]\,;L^d(\mathbf{R}^d))$ a été établie dans [15] — même si l'on sait depuis [35] que le terme $B(u,u)$ n'est pas bicontinu dans $C([0,T]\,;L^d(\mathbf{R}^d))$.

Un exemple d'équation vérifiant les théorèmes classiques de type point fixe mais dont les solutions explosent en temps fini peut être trouvé dans [33].

L'explosion de la norme $L^3(\mathbf{R}^3)$ au temps T^* est dû à [12]. La décroissance en temps grand des solutions globales figure dans [18].

L'existence globale et l'unicité pour des données initiales de norme grande dans $BMO^{-1}(\mathbf{R}^2)$ est due à [22].

3 Équation du tourbillon en deux dimensions d'espace

Dans ce paragraphe nous allons concentrer notre étude sur les équations de Navier-Stokes bidimensionnelles, en formulation tourbillon. Dans la première section, nous énonçons et esquissons la démonstration d'un théorème montrant que l'équation du tourbillon est bien posée dans $L^1(\mathbf{R}^2)$. Puis nous généralisons ce résultat au cas où la donnée initiale est une mesure finie. L'intérêt de ce cadre réside d'une part dans sa plus grande généralité, et d'autre part surtout dans le fait que c'est une situation physiquement réaliste, puisque des tourbillons très concentrés en espace (comme des sommes de masses de Dirac par exemple) sont des phénomènes observés dans certains fluides. Cette étude commence par la démonstration du caractère bien posé de l'équation pour une donnée initiale petite, puis quand la partie atomique de la donnée est petite. Ces deux résultats sont obtenus par la méthode de point fixe présentée dans le paragraphe 3.1. Dans le cas d'une grande masse de Dirac initiale, l'équation est aussi globalement bien posée (la technique de démonstration de l'unicité est très différente), et nous concluons ce paragraphe 3.2 par le cas d'une mesure quelconque.
Le paragraphe 3.3 final traite de la question du comportement en grand temps de la solution de l'équation du tourbillon bidimensionnelle. Un objet joue un rôle fondamental dans l'étude : le tourbillon d'Oseen, qui est précisément l'unique solution associée à une donnée initiale masse de Dirac.

3.1 Existence globale et unicité dans L^1

Nous allons commencer l'étude de l'équation du tourbillon dans $L^1(\mathbf{R}^2)$. On constate en effet facilement que cet espace est invariant par le changement d'échelle de l'équation, qui en termes du tourbillon s'écrit

$$\omega(t,x) \mapsto \omega_\lambda(t,x) = \lambda^2\omega(\lambda^2 t, \lambda x).$$

En outre, les inégalités (3) ne sont pas valables quand $q = 1$, et l'on constate qu'un tourbillon dans $L^1(\mathbf{R}^2)$ n'implique pas forcément que le champ de vitessses associé est dans $L^2(\mathbf{R}^2)$:

si c'était le cas, le tourbillon serait nécessairement de moyenne nulle. La moyenne étant une quantité conservée par l'équation du tourbillon, il suffit de choisir une donnée initiale qui ne soit pas de moyenne nulle pour que le champ de vitesses associé ne soit pas dans $L^2(\mathbf{R}^2)$.

Ainsi le cadre fonctionnel $L^1(\mathbf{R}^2)$ est un cadre invariant d'échelle en dimension deux, pour le tourbillon, et correspond à un cadre d'énergie infinie. Nous allons étudier ce cadre en présentant la démonstration du résultat suivant.

Théorème 3.1 *Il existe une constante $C > 0$ telle que l'on ait le résultat suivant. Soit ω_0 un élément de l'espace $L^1(\mathbf{R}^2)$. Alors il existe une unique solution ω de l'équation du tourbillon dans l'espace $C_b(\mathbf{R}^+; L^1(\mathbf{R}^2)) \cap C(]0,\infty[; L^\infty(\mathbf{R}^2))$, telle que pour tout temps $t \geq 0$,*

$$\|\omega(t)\|_{L^1(\mathbf{R}^2)} \leq \|\omega_0\|_{L^1(\mathbf{R}^2)} \quad et \quad \sup_{t' \in [0,t]} t'^{1-\frac{1}{p}} \|\omega(t')\|_{L^p(\mathbf{R}^2)} \leq C \|\omega_0\|_{L^1(\mathbf{R}^2)} \ \forall p \in [1,\infty].$$

Ce résultat s'obtient, comme dans le paragraphe 2 ci-dessus, en appliquant un théorème de point fixe à la formulation intégrale de l'équation du tourbillon. On a ainsi

$$\omega(t) = e^{t\Delta}\omega_0 + C(\omega,\omega)(t), \quad \text{où}$$

$$C(\omega,\omega)(t) = -\int_0^t e^{(t-t')\Delta}(u(t') \cdot \nabla\omega(t'))\, dt' = -\int_0^t e^{(t-t')\Delta} \mathrm{div}\,(u(t')\omega(t'))\, dt'.$$

On rappelle que u est une fonction linéaire de ω, par la loi de Biot et Savart. Afin de résoudre cette équation intégrale, nous allons appliquer le lemme de point fixe précédent (Lemme 2.3) dans l'espace de Banach

$$X_{p,T} = \left\{ f \in L^\infty_{loc}(]0,T]; L^p(\mathbf{R}^2)) \Big/ t^{1-\frac{1}{p}} \|f(t)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^2)} \in L^p(]0,T]) \right\}.$$

Démontrons la proposition suivante.

Proposition 3.2 *Soient p et q deux réels dans $[1,+\infty]$, tels que $q \in]1,2[$. Alors il existe des constantes C_2 et C_3 telles que pour tous les champs de vecteurs f dans $L^1(\mathbf{R}^2)$, on ait les inégalités suivantes : pour tout $T \geq 0$ et tout ω dans $X_{q,T}$*

$$\|e^{t\Delta} f\|_{X_{p,T}} \leq C_2 \|f\|_{L^1(\mathbf{R}^2)}, \quad et \quad \|C(\omega,\omega)(t)\|_{X_{q,T}} \leq C_3 \|\omega\|^2_{X_{q,T}}.$$

Enfin on a

$$si\, p \in]1,+\infty], \ alors \quad \lim_{t\to 0} t^{1-\frac{1}{p}} \|e^{t\Delta} f\|_{L^p(\mathbf{R}^d)} = 0. \tag{9}$$

Comme dans le cas du champ de vitesses dans la partie précédente (paragraphe 2), les estimations sur le noyau de la chaleur sont des conséquences directes du Lemme 2.5. Démontrons donc le résultat sur $C(\omega,\omega)$.

Pour estimer le terme non linéaire, on écrit comme dans le paragraphe 2, avec $1/r = 2/q - 1/2$,

$$\|C(\omega,\omega)(t)\|_{L^q} \leq C \int_0^t \frac{1}{(t-t')^{\frac{1}{q}}} \|u(t')\omega(t')\|_{L^r}\, dt'.$$

Mais

$$\|u(t')\omega(t')\|_{L^r} \leq C \|u(t')\|_{L^\beta} \|\omega(t')\|_{L^q},$$

avec $1/r = 1/\beta + 1/q$, et par (3) on a

$$\|u(t')\|_{L^\beta} \leq C \|\omega(t')\|_{L^q},$$

en remarquant que $1/\beta + 1/2 = 1/q$. On en déduit donc que

$$\|C(\omega,\omega)(t)\|_{L^q} \leq C \int_0^t \frac{1}{(t-t')^{\frac{1}{q}}} \|\omega(t')\|_{L^q}^2 \, dt'.$$

On a donc finalement

$$\begin{aligned}
\|C(\omega,\omega)(t)\|_{L^q} &\leq C\|\omega\|_{X_{q,t}}^2 \int_0^t \frac{1}{(t-t')^{\frac{1}{q}} t'^{2-\frac{2}{q}}} \, dt' \\
&\leq \frac{C}{t^{1-\frac{1}{q}}} \|\omega\|_{X_{q,t}}^2,
\end{aligned}$$

et la proposition est démontrée.

Pour terminer la démonstration du théorème, comme dans la section 2 on remarque que la proposition 3.2 fournit directement l'existence globale et l'unicité de solutions dans $X_{q,\infty}$ pour $1 < q < 2$ si la donnée initiale est suffisamment petite dans $L^1(\mathbf{R}^2)$, et locale en temps sinon, dans X_{q,t_0} pour t_0 assez petit et pour $1 < q < 2$. Pour conclure la démonstration il nous faut encore montrer que la solution ainsi construite est continue en temps à valeurs dans $L^1(\mathbf{R}^2)$, et dans X_{∞,t_0}. Enfin il faudra encore démontrer que cette solution est globale en temps, même si la donnée n'est pas petite.
Comme dans la section 2.2, on remarque tout d'abord que $e^{t\Delta}\omega_0$ est clairement continue en temps à valeurs dans $L^1(\mathbf{R}^2)$, et dans $X_{\infty,\infty}$. Il reste donc à étudier le terme non linéaire. Les calculs sont un peu plus compliqués que dans la section 2.2, en tous cas pour le second point. Commençons donc par vérifier que $C(\omega,\omega)$ appartient à $X_{1,t}$ dès que $\omega \in X_{q,t}$ pour $1 < q < 2$. Nous allons choisir $q = 4/3$ dans les calculs qui suivent.
On a ainsi

$$\|C(\omega,\omega)(t)\|_{L^1(\mathbf{R}^2)} \leq C \int_0^t \frac{1}{(t-t')^{\frac{1}{2}}} \|u(t')\omega(t')\|_{L^1(\mathbf{R}^2)} \, dt'.$$

Une inégalité de Hölder, suivie des estimations (3) permet d'écrire que

$$\begin{aligned}
\|u(t')\omega(t)\|_{L^1(\mathbf{R}^2)} &\leq \|u(t)\|_{L^4(\mathbf{R}^2)} \|\omega(t)\|_{L^{\frac{4}{3}}(\mathbf{R}^2)} \\
&\leq C\|\omega(t)\|_{L^{\frac{4}{3}}(\mathbf{R}^2)}^2,
\end{aligned}$$

donc il vient

$$\begin{aligned}
\|C(\omega,\omega)(t)\|_{L^1(\mathbf{R}^2)} &\leq C \int_0^t \frac{1}{(t-t')^{\frac{1}{2}}} \|\omega(t')\|_{L^{\frac{4}{3}}(\mathbf{R}^2)}^2 \, dt' \\
&\leq C\|\omega\|_{X_{\frac{4}{3},t}},
\end{aligned}$$

et le résultat est démontré. Pour estimer la norme $X_{\infty,t}$ de $C(\omega,\omega)$, nous devons procéder en deux étapes. On écrit ainsi

$$C(\omega,\omega)(t) = C_1(\omega,\omega)(t) + C_2(\omega,\omega)(t), \quad \text{avec}$$

$$C_1(\omega,\omega)(t) = -\int_0^{\frac{t}{2}} e^{(t-t')\Delta} \mathrm{div}(u(t')\omega(t')) dt' \quad \text{et} \quad C_2(\omega,\omega)(t) = -\int_{\frac{t}{2}}^t e^{(t-t')\Delta} \mathrm{div}(u(t')\omega(t')) dt'.$$

Un calcul analogue au précédent permet d'écrire, pour tout $q \in]1,2[$, en posant $2/q = 1/2 + 1/r$,

$$
\begin{aligned}
t\|C_1(\omega,\omega)(t)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^2)} &\leq Ct\int_0^{\frac{t}{2}} \frac{1}{(t-t')^{\frac{2}{q}}}\|u(t')\omega(t')\|_{L^r}\,dt' \\
&\leq Ct\int_0^{\frac{t}{2}} \frac{1}{(t-t')^{\frac{2}{q}}}\|\omega(t')\|_{L^q}^2\,dt',
\end{aligned}
$$

donc $C_1(\omega,\omega)$ appartient bien à $X_{\infty,t}$. Pour évaluer l'intégrale entre $t/2$ et t on utilise l'estimation suivante (voir par exemple [19], Lemme 2.1)

$$
\|u\|_{L^\infty(\mathbf{R}^2)} \leq C\|\omega\|_{L^q(\mathbf{R}^2)}^{\frac{q}{2}}\|\omega\|_{L^\infty(\mathbf{R}^2)}^{1-\frac{q}{2}},
$$

avec $1 < q < 2$. Il vient alors

$$
\begin{aligned}
\|C_2(\omega,\omega)(t)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^2)} &\leq C\int_{\frac{t}{2}}^{t} \frac{1}{(t-t')^{\frac{1}{2}+\frac{1}{q}}}\|u(t')\omega(t')\|_{L^q}\,dt' \\
&\leq C\int_{\frac{t}{2}}^{t} \frac{1}{(t-t')^{\frac{1}{2}+\frac{1}{q}}}\|\omega(t')\|_{L^q}^{1+\frac{q}{2}}\|\omega(t')\|_{L^\infty}^{1-\frac{q}{2}}\,dt'.
\end{aligned}
$$

On a alors

$$
\begin{aligned}
\|C_2(\omega,\omega)(t)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^2)} &\leq C\|\omega\|_{X_{\infty,t}}^{1-\frac{q}{2}}\int_{\frac{t}{2}}^{t} \frac{1}{(t-t')^{\frac{1}{2}+\frac{1}{q}}t'^{1-\frac{q}{2}}}\|\omega(t')\|_{L^q}^{1+\frac{q}{2}}\,dt' \\
&\leq \frac{C}{t}\|\omega\|_{X_{\infty,t}}^{1-\frac{q}{2}}\|\omega\|_{X_{q,t}}^{1+\frac{q}{2}}.
\end{aligned}
$$

Enfin on conclut que

$$
\begin{aligned}
\|\omega\|_{X_{\infty,t}} &\leq C\|\omega_0\|_{L^1} + \|C_1(\omega,\omega)\|_{X_{\infty,t}} + \|C_2(\omega,\omega)\|_{X_{\infty,t}} \\
&\leq C\|\omega_0\|_{L^1} + C\|\omega\|_{X_{q,t}} + C\|\omega\|_{X_{\infty,t}}^{1-\frac{q}{2}}\|\omega\|_{X_{q,t}}^{1+\frac{q}{2}} \\
&\leq C\|\omega_0\|_{L^1} + C\|\omega\|_{X_{q,t}} + \frac{1}{2}\|\omega\|_{X_{\infty,t}} + C\|\omega\|_{X_{q,t}}^{1+\frac{2}{q}},
\end{aligned}
$$

et le résultat est démontré.

Comme dans la section 2.2, les estimations obtenues nous permettent de démontrer le résultat cherché si ω_0 est petit dans $L^1(\mathbf{R}^d)$. Sinon, on n'obtient par cette méthode que l'existence locale et l'unicité d'une solution dans $X_{p,T}$ pour $p \in [1,+\infty]$ et T assez petit. Pour achever la démonstration du Théorème 3.1, il nous reste donc encore à démontrer que l'existence est globale, même si la donnée initiale est grande. L'information supplémentaire dont nous disposons ici, par rapport au paragraphe 2.2, est que la norme L^1 du tourbillon est contrôlée uniformément en temps par la norme L^1 de la donnée initiale. Malheureusement ce fait ne suffit pas pour conclure puisque nous avons vu dans la section précédente que le temps sur lequel le point fixe fonctionne ne dépend pas seulement de la norme de la donnée initiale, mais de toute la donnée : en effet le temps sur lequel l'argument est valable est t_0 tel que

$$
4C_3\|e^{t\Delta}\omega_0\|_{X_{q,t_0}} < 1, \quad 1 < q < 2,
$$

et ce temps existe grâce à la limite donnée dans la proposition 3.2. Néanmoins c'est la conservation des normes L^p qui va nous permettre de conclure. En effet comme sur $]0,t_0[$, la solution $\omega(t)$

est dans $X_{p,T}$, elle est en particulier dans L^p pour tout $p \in [1, +\infty]$ et tout $t \in]0, t_0[$. Nous pouvons donc considérer le problème de Cauchy à un instant $s \in]0, t_0[$, et dans ce cas la donnée au temps s est non seulement dans L^1, mais aussi dans L^p pour tout $p \in [1, +\infty]$. Pour simplifier l'exposition on peut poser $s = 0$, et on est donc ramené à démontrer l'existence globale pour une donnée initiale dans L^p pour tout $p \in [1, +\infty]$.
Mais par le Lemme 2.5 on a alors, pour tout $q \in]1, 2[$ et tout $p < q$,

$$\|e^{t\Delta}\omega_0\|_{L^q(\mathbf{R}^2)} \leq \frac{C}{t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}} \|\omega(0)\|_{L^p(\mathbf{R}^2)},$$

donc

$$t^{1-\frac{1}{q}} \|e^{t\Delta}\omega_0\|_{L^q(\mathbf{R}^2)} \leq C t^{1-\frac{1}{p}} \|\omega(0)\|_{L^p(\mathbf{R}^2)}.$$

Par conséquent on a obtenu un taux de décroissance quand t tend vers zéro, ce qui n'était pas le cas auparavant. On en conclut que le temps d'existence donné par le point fixe est t_0 tel que

$$4C_3 C t_0^{1-\frac{1}{p}} \|\omega(0)\|_{L^p(\mathbf{R}^2)} < 1.$$

Dès que la donnée initiale est dans $L^p(\mathbf{R}^2)$ avec $p > 1$, on a donc un contrôle uniforme sur le temps d'existence donné par le point fixe, qui ne dépend que de la taille de la donnée dans $L^p(\mathbf{R}^2)$. Comme la norme $L^p(\mathbf{R}^2)$ du tourbillon est contrôlée pour tous les temps, par la norme $L^p(\mathbf{R}^2)$ de la donnée initiale, on en déduit que l'argument peut être itéré jusqu'à atteindre n'importe quel temps T donné, arbitrairement grand.

Le Théorème 3.1 est démontré.

3.2 Le problème de Cauchy pour une donnée initiale mesure

3.2.1 L'espace des mesures finies sur $\mathbf{R}^2$

Nous allons chercher à généraliser le résultat précédent au cas où la donnée initiale est une mesure finie. Dans cette partie introductive nous allons rappeller les définitions qui nous seront utiles par la suite.
Soit donc $C_0(\mathbf{R}^2)$ l'espace des fonctions réelles continues, tendant vers zéro à l'infini. On note par $\mathcal{M}(\mathbf{R}^2)$ l'espace des mesures réelles finies sur $\mathbf{R}^2$, que l'on munit de la norme de la variation totale

$$\forall \mu \in \mathcal{M}(\mathbf{R}^2), \quad \|\mu\|_{\mathcal{M}} = \sup \left\{ \int_{\mathbf{R}^2} \phi \, d\mu \;/\; \phi \in C_0(\mathbf{R}^2) \text{ et } \|\phi\|_{L^\infty} \leq 1 \right\}.$$

Muni de cette norme, l'espace $\mathcal{M}(\mathbf{R}^2)$ est un espace de Banach, et l'on note que la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$ est invariante par le changement d'échelle de l'équation du tourbillon dans $\mathbf{R}^2$. On utilisera aussi dans la suite la convergence faible des mesures : une suite $\{\mu_n\}$ d'éléments de $\mathcal{M}(\mathbf{R}^2)$ converge faiblement vers μ si

$$\int_{\mathbf{R}^2} \phi \, d\mu_n \to \int_{\mathbf{R}^2} \phi \, d\mu$$

quand n tend vers l'infini, pour tout $\phi \in C_0(\mathbf{R}^2)$. On notera $\mu_n \rightharpoonup \mu$.
On rappelle enfin que toute mesure finie peut se décomposer en une somme au plus dénombrable de masses de Dirac (la partie purement ponctuelle, ou partie atomique), à un reste près qui ne charge pas les points (la partie absolument continue). On notera $\|\mu_{\text{pp}}\|_{\mathcal{M}}$ la variation totale de la partie purement ponctuelle μ_{pp} de μ.

Dans la suite de cette partie, nous allons démontrer un résultat d'existence globale et d'unicité de solutions à l'équation du tourbillon pour une donnée initiale mesure.

3.2.2 Donnée initiale avec petite partie atomique

Nous allons donner une idée de la démonstration du théorème suivant. Nous ne rentrerons pas dans tous les détails, mais indiquerons simplement les aménagements à apporter à la démonstration du Théorème 3.1 précédent pour traiter le cadre d'une donnée initiale mesure plutôt que dans $L^1(\mathbf{R}^2)$. Comme l'indique le Théorème 3.3 ci–dessous, le prix à payer du passage de $L^1(\mathbf{R}^2)$ à $\mathcal{M}(\mathbf{R}^2)$ est une condition de petitesse sur la donnée initiale.

Théorème 3.3 *Il existe des constantes $C > 0$ et $\delta > 0$ telles que l'on ait le résultat suivant. Soit ω_0 un élément de l'espace $\mathcal{M}(\mathbf{R}^2)$, tel que*

$$\|\omega_{0,\mathrm{pp}}\|_{\mathcal{M}} \leq \delta.$$

Il existe une unique solution ω de l'équation du tourbillon dans $C(]0,\infty[; L^1(\mathbf{R}^2) \cap L^\infty(\mathbf{R}^2))$ telle que pour tout temps $t > 0$,

$$\|\omega(t)\|_{L^1} \leq C\|\omega_0\|_{\mathcal{M}} \quad et \quad \sup_{t' \in]0,t]} t'^{1-\frac{1}{p}} \|\omega(t')\|_{L^p} \leq C\|\omega_0\|_{\mathcal{M}} \ \forall p \in [1,\infty].$$

La démonstration de ce résultat repose sur les mêmes arguments de point fixe que dans la section précédente, dans l'espace de Banach $X_{p,T}, 1 < p < +\infty$. De la même façon qu'au paragraphe 2.2, on peut montrer le lemme suivant.

Lemme 3.4 *Soit un réel p dans $[1,+\infty]$, et soit un entier $k \in \mathbf{N}$. Alors il existe une constante C telle que pour tout $t > 0$ et tout $\mu \in \mathcal{M}(\mathbf{R}^2)$ on a*

$$\|e^{t\Delta}\mu\|_{L^p(\mathbf{R}^2)} \leq \frac{C}{t^{1-\frac{1}{p}}}\|\mu\|_{\mathcal{M}}$$
$$et \quad \sup_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha e^{t\Delta}\mu\|_{L^p(\mathbf{R}^2)} \leq \frac{C}{t^{\frac{k}{2}+1-\frac{1}{p}}}\|\mu\|_{\mathcal{M}}.$$

Le seul point qui différencie ce cadre de celui traité dans le paragraphe précédent concerne les estimations sur la donnée initiale, et plus particulièrement la limite (9). En effet celle-ci n'est bien sûr plus vraie quand le tourbillon n'est pas dans L^1, et on la remplace par le lemme clef suivant.

Lemme 3.5 *Soit un réel p dans $]1,+\infty]$. Il existe une constante C telle que pour toute mesure $\mu \in \mathcal{M}(\mathbf{R}^2)$, on a*

$$\limsup_{t\to 0} \|e^{t\Delta}\mu\|_{X_{p,t}} \leq C\|\mu_{\mathrm{pp}}\|_{\mathcal{M}}.$$

Ce résultat se démontre en revenant à la définition du noyau de la chaleur. On peut supposer sans perte de généralité que $\mu_{\mathrm{pp}} = 0$, en montrant dans ce cas que

$$\limsup_{t\to 0} \|e^{t\Delta}\mu\|_{X_{p,t}} = 0.$$

On écrit

$$e^{t\Delta}\mu(x) = \frac{1}{4\pi t}\int_{\mathbf{R}^2} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\, d\mu(y),$$

donc

$$\left(t^{1-\frac{1}{p}}\|e^{t\Delta}\mu\|_{L^p(\mathbf{R}^2)}\right)^p = \frac{1}{(4\pi)^p t}\int_{\mathbf{R}^2}\left|\int_{\mathbf{R}^2} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\, d\mu(y)\right|^p dx.$$

Comme μ est une mesure finie, on peut restreindre l'intégrale en y à une boule de taille N arbitrairement grande. En effet en notant $\mu_N = \mathbf{1}_{|\cdot|\leq N}\,\mu$, on a par le Lemme 3.4,

$$\|e^{t\Delta}(\mu - \mu_N)\|_{X_{p,T}} \leq C\|\mu - \mu_N\|_{\mathcal{M}} \to 0 \quad \text{quand } N \to \infty,$$

uniformément en T. On peut donc se ramener au cas oÙ $\mu = \mu_N$, et l'on découpe alors l'intégrale en x en deux parties : dans la première on a $|x| \geq 2N$, auquel cas $|x - y| \geq |x|/2$ et l'on peut écrire

$$\frac{1}{(4\pi)^p t}\int_{|x|\geq 2N}\left|\int_{\mathbf{R}^2} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\,d\mu_N(y)\right|^p dx \leq \frac{C}{t}\int_{|x|\geq 2N} e^{-\frac{|x|^2}{Ct}}\,dx \to 0 \quad \text{quand} \quad t \to 0,$$

pour tout $N > 0$. Dans la seconde intégrale on a $|x| \leq 2N$. Si $|x - y| \geq \delta$, pour un certain δ arbitrairement petit, alors l'estimation précédente est remplacée par

$$\frac{1}{(4\pi)^p t}\int_{|x|\leq 2N}\left|\int_{\mathbf{R}^2} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\mathbf{1}_{|x-y|\geq\delta}\,d\mu_N(y)\right|^p dx \leq \frac{C}{t}\int_{|x|\leq 2N} e^{-\frac{\delta^2}{Ct}}\,dx \to 0 \quad \text{quand} \quad t \to 0,$$

pour tout $N > 0$ et tout $\delta > 0$. Enfin la contribution des cas $|x - y| \leq \delta$ est négligeable quand δ tend vers zéro, puisqu'on a fait l'hypothèse que $\mu_{\text{pp}} = 0$. Le lemme est démontré.

Une fois ce lemme obtenu, le Théorème 3.3 suit directement par point fixe, exactement comme dans les sections 2.2 et 3.1 (dans le cadre des données petites).

3.2.3 Donnée initiale masse de Dirac

Dans ce paragraphe nous allons démontrer l'unicité des solutions associées à une donnée initiale masse de Dirac. La question de l'existence de solutions sous cette hypothèse présente bien sûr un intérêt, mais nous choisissons de ne pas la traiter ici et renvoyons à [10] ou [23] pour la démonstration de l'existence globale (sans unicité) de solutions associées à toute mesure initiale – cette démonstration est du même type que la construction de solutions faibles.
Le théorème pour une donnée initiale masse de Dirac est le suivant.

Théorème 3.6 *Soit α un nombre réel quelconque. L'équation du tourbillon (1.4) possède une solution globale unique $\omega \in C(]0,\infty[\,; L^1(\mathbf{R}^2) \cap L^\infty(\mathbf{R}^2))$ telle que $\omega(t) \rightharpoonup \alpha\delta_0$ lorsque $t \to 0^+$. Cette solution est le tourbillon d'Oseen*

$$\omega(t,x) = \frac{\alpha}{t}G\Big(\frac{x}{\sqrt{t}}\Big), \quad \textit{avec} \quad G(\xi) = \frac{1}{4\pi}e^{-|\xi|^2/4}. \tag{10}$$

Remarques.
1) Il est à noter que le tourbillon d'Oseen (10) n'est autre que la solution de l'équation de la chaleur avec donnée initiale $\alpha\delta_0$: le terme non linéaire disparaît du fait du caractère radial de cette solution. Notons que le champ de vitesse associé s'écrit

$$u(t,x) = \frac{\alpha}{\sqrt{t}}v^G\Big(\frac{x}{\sqrt{t}}\Big) \quad \text{avec} \quad v^G(\xi) = \frac{1}{2\pi}\frac{\xi^\perp}{|\xi|^2}\Big(1 - e^{-|\xi|^2/4}\Big).$$

2) Nous verrons dans la dernière partie de ces notes que le tourbillon d'Oseen possède en outre la particularité d'attirer les solutions associées à toutes les données initiales mesures finies (voir le Théorème 3.12 ci–dessous).

Pour démontrer l'unicité, un point fixe (ou un argument de type Gronwall) semble voué à l'échec, puisqu'ils nécessiterait une petite partie atomique (donc α suffisamment petit ici).

Les deux méthodes proposées ici sont des méthodes “directes” pour obtenir l'unicité. Avant de les présenter, nous allons énoncer quelques propriétés qui nous seront utiles dans toute la suite, y compris dans la section sur les mesures quelconques au paragraphe 3.2.4. Ce sont des résultats fondamentaux sur des équations de transport-diffusion, dont on pourra trouver les démonstrations dans les travaux de Carlen et Loss [7] et d'Osada [36].

Quelques estimations sur les équations de transport-diffusion. Soit l'équation de transport-diffusion suivante

$$\partial_t \omega + U \cdot \nabla \omega - \Delta \omega = 0, \tag{11}$$

où $U \in C(]0,T[; L^\infty(\mathbf{R}^2))$ est un champ de vecteurs de divergence nulle donné, tel que pour tout $t \in]0,T[$,

$$\|U(t)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^2)} \leq \frac{K}{\sqrt{t}}.$$

On suppose aussi que $\partial_1 U_2 - \partial_2 U_1 \in C(]0,T[; L^1(\mathbf{R}^2))$ et que pour tout $t \in]0,T[$,

$$\|(\partial_1 U_2 - \partial_2 U_1)(t)\|_{L^1(\mathbf{R}^2)} \leq K. \tag{12}$$

Les résultats rassemblés ci-dessous sont dus à [7] et [36] : on peut écrire

$$\omega(t,x) \;=\; \int \Gamma_U(t,x;s,y)\omega(s,y)\,dy, \quad x \in \mathbf{R}^2, \quad t > s > 0, \tag{13}$$

où Γ_U est la solution fondamentale de l'équation de transport-diffusion (11), qui vérifie les propriétés suivantes.

• Pour tout $\beta \in]0,1[$ il existe $K_1 > 0$ (dépendant seulement de K et de β) telle que

$$0 \;<\; \Gamma_U(t,x;s,y) \;\leq\; \frac{K_1}{t-s}\,\exp\Big(-\beta\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}\Big), \tag{14}$$

pour tous les $x, y \in \mathbf{R}^2$ et $t > s > 0$.

• Il existe $\gamma \in]0,1[$ (ne dépendant que de K) et pour tout $\delta > 0$, il existe $K_2 > 0$ (dépendant seulement de K et δ) tels que

$$|\Gamma_U(t,x;s,y) - \Gamma_U(t',x';s',y')| \leq K_2\Big(|x-x'|^\gamma + |t-t'|^{\gamma/2} + |y-y'|^\gamma + |s-s'|^{\gamma/2}\Big),$$

dès que $t - s \geq \delta$ et $t' - s' \geq \delta$.

• Pour $t > s > 0$ et $x, y \in \mathbf{R}^2$,

$$\int \Gamma_U(t,x;s,y)\,dx \;=\; 1 \quad \text{et} \quad \int \Gamma_U(t,x;s,y)\,dy \;=\; 1. \tag{15}$$

Reprenons la démonstration du Théorème 3.6. Dans ce cas, $U = u$ est le champ de vitesses associé à ω par la loi de Biot et Savart et (11) est l'équation du tourbillon, avec $\omega(t) \rightharpoonup \alpha\delta_0$ quand t tend vers 0^+. On déduit des propriétés ci-dessus en particulier que $s \mapsto \Gamma_U(x,t;y,s)$ peut être prolongée continûment en $s = 0$ et que ce prolongement vérifie les mêmes propriétés. Par conséquent pour tout $x \in \mathbf{R}^2$ et tout $t > 0$

$$\begin{aligned} \omega(t,x) \;&=\; \int \Gamma_U(t,x;0,y)\omega(s,y)\,dy \\ &+\; \int \Big(\Gamma_U(t,x;s,y) - \Gamma_U(t,x;0,y)\Big)\omega(s,y)\,dy\,, \quad 0 < s < t. \end{aligned} \tag{16}$$

La seconde intégrale tend vers zéro avec s, et en prenant la limite $s \to 0$ dans la première intégrale on trouve pour tout $x \in \mathbf{R}^2$ et tout $t > 0$

$$\omega(t,x) \;=\; \alpha\Gamma_u(t,x;0,0), \qquad x \in \mathbf{R}^2. \tag{17}$$

En particulier on a $\omega \equiv 0$ si $\alpha = 0$, et dans la suite on supposera $\alpha > 0$. Ainsi $\omega(t)$ est strictement positif pour tout temps $t \geq 0$. On notera aussi

$$\Omega(t,x) \;=\; \frac{\alpha}{4\pi t}\, e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, \quad x \in \mathbf{R}^2, \quad t > 0.$$

D'après (14) et (17) on a pour tout $x \in \mathbf{R}^2$ et tout $t > 0$

$$0 \;<\; \omega(t,x) \;\leq\; \frac{K_1\alpha}{t}\, e^{-\beta\frac{|x|^2}{4t}}, \tag{18}$$

et par (15), pour tout $t > 0$,

$$\int \omega(t,x)dx \;=\; \alpha \;=\; \int \Omega(t,x)\, dx. \tag{19}$$

Enfin il est facile de voir que

$$\forall t > 0, \quad \int |x|^2\omega(t,x)dx \;=\; 4\alpha t \;=\; \int |x|^2\Omega(t,x)\, dx. \tag{20}$$

Méthode d'entropie. Dans cette partie nous allons obtenir le théorème d'unicité pour une donnée initiale masse de Dirac en utilisant des estimations d'entropie (voir [21]). Si ω est une solution de l'équation du tourbillon dans $C(]0,T[; L^1(\mathbf{R}^2) \cap L^\infty(\mathbf{R}^2))$, définissons le tourbillon remis à l'échelle (parabolique) et le champ de vitesses associé

$$w(\tau,\xi) \;=\; e^\tau\omega(e^\tau, \xi\, e^{\frac{\tau}{2}}), \quad v(\tau,\xi) \;=\; e^{\frac{\tau}{2}}u(e^\tau, \xi\, e^{\frac{\tau}{2}}), \quad \xi \in \mathbf{R}^2, \quad \tau \in \mathbf{R},$$

avec les notations

$$\tau = \log t \quad \text{et} \quad \xi = \frac{x}{\sqrt{t}}\cdot \tag{21}$$

Nous aurons l'occasion de revoir ce changement de variables dans la suite. Il s'agit d'un changement de variables (dit autosimilaire) classique dans la théorie des systèmes paraboliques, qui permet de transformer l'équation du tourbillon en l'équation suivante :

$$\partial_\tau w + (v\cdot\nabla_\xi)w = \Delta_\xi w + \frac{1}{2}(\xi\cdot\nabla_\xi)w + w,$$

où v s'obtient de w par la loi de Biot et Savart. À première vue cette équation paraît plus compliquée que l'équation du tourbillon d'origine. Nous verrons qu'il n'en est rien, l'opérateur (de type Fokker-Planck) apparaissant à droite ayant des propriétés spectrales particulièrement intéressantes, qui nous seront d'une grande utilité pour l'étude du comportement asymptotique des solutions. En fait pour montrer l'unicité dans notre cadre, c'est dans cette formulation que les calculs seront les plus lisibles et les plus simples.
Soit en effet $f : \mathbf{R}^2 \to]0,+\infty[$ une fonction C^1 d'intégrale 1. On définit les deux quantités suivantes :

$$H(f) \;=\; \int f(\xi)\log\Big(\frac{f(\xi)}{G(\xi)}\Big)d\xi \quad \text{et} \quad I(f) \;=\; \int f(\xi)\Big|\nabla\log\Big(\frac{f(\xi)}{G(\xi)}\Big)\Big|^2 d\xi,$$

où G est définie par (10). L'entropie $H(f)$ vérifie (voir par exemple [3])

$$\frac{1}{2}\|f-G\|_{L^1}^2 \;\le\; H(f) \;\le\; I(f).$$

En particulier on a $H(f) \ge 0$, et $H(f) = 0$ si et seulement si $f = G$.

Revenons maintenant à la démonstration du Théorème 3.6. Rappellons que nous avons supposé $\alpha > 0$, donc on peut considérer la fonction $h(\tau) = H(w(\tau,\cdot)/\alpha)$. Alors par (18) il existe une constante $K_3 > 0$ telle que $0 \le h(\tau) \le K_3$ pour tout $\tau \in \mathbf{R}$. D'autre part on peut montrer que

$$\frac{d}{d\tau}H\Big(\frac{w(\tau,\cdot)}{\alpha}\Big) = -I\Big(\frac{w(\tau,\cdot)}{\alpha}\Big), \quad \tau \in \mathbf{R}. \tag{22}$$

Cette égalité s'obtient par des calculs élémentaires. On écrit en effet

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau}H\Big(\frac{w(\tau,\cdot)}{\alpha}\Big) &= \frac{1}{\alpha}\int_{\mathbf{R}^2}\Big(1+\log\frac{w}{\alpha G}\Big)\,\partial_\tau w\,d\xi \\
&= \frac{1}{\alpha}\int_{\mathbf{R}^2}\Big(1+\log\frac{w}{\alpha G}\Big)\,(\mathcal{L}w - v\cdot\nabla w)\,d\xi,
\end{aligned}$$

où l'on a noté $\mathcal{L}$ l'opérateur de Fokker-Planck

$$\mathcal{L}w = \Delta_\xi w + \frac{1}{2}(\xi\cdot\nabla_\xi)w + w. \tag{23}$$

On a d'une part

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\alpha}\int_{\mathbf{R}^2}\Big(1+\log\frac{w}{\alpha G}\Big)\,\mathcal{L}w\,d\xi &= -\frac{1}{\alpha}\int_{\mathbf{R}^2}\nabla\Big(\log\frac{w}{\alpha G}\Big)\cdot\frac{\alpha G}{w}\nabla\frac{w}{\alpha G}w\,d\xi \\
&= -I\Big(\frac{w}{\alpha}\Big),
\end{aligned}$$

après intégrations par parties, où l'on a utilisé le fait que $\mathcal{L}w = \mathrm{div}\,(G\nabla(w/G))$. D'autre part on constate que

$$\int_{\mathbf{R}^2}\Big(1+\log\frac{w}{\alpha G}\Big)\,(v\cdot\nabla\frac{w}{\alpha})\,d\xi = 0,$$

ce qui démontre l'identité (22).
On tire de (22) que $h'(\tau) \le -h(\tau)$ pour tout $\tau \in \mathbf{R}$. C'est cette estimation qui est le point crucial de la preuve. Écrite en variables d'origine elle est bien sûr difficilement compréhensible, alors que dans le cadre des variables autosimilaires elle s'obtient de manière relativement naturelle. Finalement il vient

$$h(\tau) \;\le\; e^{-(\tau-\tau_0)}h(\tau_0) \;\le\; K_3\,e^{-(\tau-\tau_0)} \quad \text{dès que } \tau \ge \tau_0,$$

et le résultat s'obtient en faisant tendre τ_0 vers $-\infty$: on trouve que h est identiquement nulle, donc en revenant à l'entropie, on a $H(w(\tau,\cdot)/\alpha) = 0$ pour tout $\tau \in \mathbf{R}$. Comme remarqué ci-dessus, cela implique que $w(\tau) = \alpha G$ pour tout $\tau \in \mathbf{R}$, d'où le résultat.

Méthode de réarrangements. Nous allons proposer ici une autre démonstration de l'unicité dans le cas d'un tourbillon initial masse de Dirac, qui repose sur des réarrangements symétriques décroissants (voir [17]). Nous rappellons les définitions et les propriétés principales de ces objets, et renvoyons à [1], [4], [29] par exemple pour des détails et des preuves.

Soit donc $f : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ une fonction mesurable, nulle à l'infini. On lui associe sa fonction de distribution $\mu_f : [0,+\infty[\to [0,+\infty]$ définie par

$$\mu_f(t) \;=\; \mathrm{mes}\,(\{x \in \mathbf{R}^N \,/\, |f(x)| > t\}),$$

et le réarrangement décroissant $f^* : [0,+\infty[\to [0,+\infty]$ par

$$f^*(s) \;=\; \sup\,\{t \geq 0 \,/\, \mu_f(t) > s\}.$$

Enfin le réarrangement symétrique décroissant $f^\# : \mathbf{R}^N \to [0,+\infty]$ est défini par

$$f^\#(x) \;=\; f^*(c_N|x|^N),$$

où $c_N = \pi^{N/2}/\Gamma(\frac{N}{2}+1)$. La fonction $f^\#$ est à symétrie radiale, décroissante le long des rayons. On a en outre $\|f^\#\|_{L^p} = \|f\|_{L^p}$ pour tout $p \in [1,\infty]$.
On peut introduire un ordre partiel sur les fonctions sommables de la manière suivante.

Définition 3.7 *Soient $f, g : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ deux fonctions sommables. On dit que f est dominée par g, et l'on note $f \preceq g$, si*

$$\int_{B_R} f^\#(x)dx \;\leq\; \int_{B_R} g^\#(x)dx \qquad \textit{pour tout } R > 0,$$

où $B_R = \{x \in \mathbf{R}^N \,,\, |x| < R\}$.

Nous omettons la démonstration de la proposition classique suivante, qui est à la base de la démonstration de l'unicité (voir par exemple [17] pour une démonstration).

Proposition 3.8 *Soient $f, g : \mathbf{R}^N \to [0,+\infty[$ deux fonctions continues et sommables, telles que $f \preceq g$ et $g = g^\#$. On suppose que*

$$\int_{\mathbf{R}^N} f(x)\,dx = \int_{\mathbf{R}^N} g(x)\,dx \quad \textit{et} \quad \int_{\mathbf{R}^N} |x|^N f(x)\,dx = \int_{\mathbf{R}^N} |x|^N g(x)\,dx < \infty.$$

Alors $f = g$.

Supposons maintenant que $f : [0,+\infty[\, \times \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ est solution de l'équation de transport-diffusion

$$\partial_t f + U \cdot \nabla f - \Delta f = 0,$$

où $U : [0,+\infty[\, \times \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N$ est un champ de vecteurs de divergence nulle, régulier, borné ainsi que toutes ses dérivées. On suppose en outre que la donnée initiale $f_0 = f(0,\cdot)$ est continue et à décroissance rapide. On peut montrer la proposition suivante, basée sur des résultats de [2], joints à une formule de Trotter.

Proposition 3.9 *On a $f(t) \preceq e^{t\Delta} f_0^\#$, pour tout $t \geq 0$.*

Pour terminer la démonstration du Théorème 3.6, il suffit de mettre bout-à-bout les deux propositions précédentes. En effet si $\omega^\#(t,x)$ est le réarrangement symétrique décroissant (en x) de $\omega(t,x)$ alors par (18) et comme les réarrangements respectent l'ordre, on a

$$0 \;<\; \omega^\#(t,x) \;\leq\; K_1\Omega(t,x), \quad x \in \mathbf{R}^2, \quad t > 0.$$

En outre on a $\omega^\#(t) \rightharpoonup \alpha\delta_0$ quand $t \to 0^+$. Soit maintenant $t > s > 0$. La Proposition 3.9 appliquée à $N = 2$, $f(t',x) = \omega(t'+s,x)$, et $U(t',x) = u(t'+s,x)$ conduit à

$$\omega(t) \;\preceq\; e^{(t-s)\Delta}\omega^\#(s).$$

En prenant la limite $s \to 0^+$, on obtient

$$\omega(t) \;\preceq\; \Omega(t), \quad \text{pour tout } t > 0. \tag{24}$$

On fixe alors $t > 0$ et l'on applique la Proposition 3.8 avec $N = 2$, $f = \omega(t)$ et $g = \Omega(t)$. Par (19), (20) et (24) on en déduit que $\omega(t) = \Omega(t)$ pour tout $t > 0$ et le résultat est démontré.

3.2.4 Donnée initiale mesure quelconque

Ce paragraphe est dévolu à la démonstration du théorème suivant, qui indique que l'unicité de la solution de l'équation du tourbillon a lieu pour toute donnée initiale mesure finie (et pas seulement sous une condition de petitesse, ou pour une seule masse de Dirac).

Théorème 3.10 *Pour toute mesure initiale $\mu \in \mathcal{M}(\mathbf{R}^2)$, l'équation du tourbillon possède une solution globale unique*

$$\omega \in C(]0,\infty[\,, L^1(\mathbf{R}^2) \cap L^\infty(\mathbf{R}^2))$$

telle que $\omega(t) \rightharpoonup \mu$ lorsque $t \to 0^+$. Cette solution dépend continûment de la mesure initiale μ pour la topologie forte, uniformément en temps sur les compacts, et l'on a en outre

$$\int_{\mathbf{R}^2} \omega(t,x)\,dx = \alpha \overset{\text{déf}}{=} \mu(\mathbf{R}^2) \quad \textit{pour tout } t > 0.$$

D'autre part si $(\mu_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de mesures convergeant faiblement vers $\mu \in \mathcal{M}(\mathbf{R}^2)$, alors la suite $\omega_n(t)$ de solutions associées à μ_n converge faiblement vers la solution $\omega(t)$ associée à μ, pour tous les temps $t > 0$. En outre si μ_n est uniformément localisée, au sens où

$$\lim_{R\to\infty} \left(\sup_{n\in\mathbf{N}} |\mu_n| \left(\left\{ x \in \mathbf{R}^2 \,/\, |x| \geq R \right\} \right) \right) = 0,$$

alors la convergence de ω_n vers ω est forte dans $L^1(\mathbf{R}^2)$ localement uniformément en temps pour $t > 0$.

Dans ce théorème les affirmations nouvelles concernent l'unicité de la solution, et la stabilité (forte et faible). Nous ne donnerons pas la démonstration de la stabilité ici. Indiquons simplement que la stabilité forte découle de la démonstration de l'unicité (ou d'une version légèrement précisée de celle-ci), alors que la stabilité faible revient en fait à un argument de compacité et n'a pas grand chose à voir avec l'unicité (de la même façon que le théorème de Leray d'existence de solutions faibles).

Nous allons donc maintenant nous concentrer sur la démonstration de l'unicité de la solution. L'idée est la suivante : on a vu au paragraphe 3.2.2 comment démontrer l'unicité pour une donnée initiale de partie atomique petite (la technique est un point fixe), alors que dans le paragraphe 3.2.3 est présentée la démonstration de l'unicité dans le cas d'une grande masse de Dirac. Il est donc naturel d'essayer de rassembler ces deux démarches, en décomposant la mesure initiale μ en une somme finie de masses de Dirac, à un reste près dont la partie atomique est petite : étant donné $\varepsilon > 0$, il existe ainsi un entier $N \in \mathbf{N}$ et des points $z_1, .., z_N$ deux à deux distincts tels que la mesure initiale μ admette la décomposition

$$\mu = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \delta_{z_i} + \mu_0,$$

où $\alpha_i = \mu(\{z_i\}) \neq 0$ et $\|\mu_{0,\mathrm{pp}}\|_{\mathcal{M}} \leq \varepsilon$. Evidemment on a en général $N \to \infty$ lorsque $\varepsilon \to 0$. Dans la suite, $\varepsilon > 0$ est fixé, suffisamment petit.

Soit ω une solution de l'équation du tourbillon satisfaisant aux hypothèses du Théorème 3.10, on peut la décomposer de manière similaire :

$$\omega = \sum_{i=1}^{N} \omega_i + \tilde{\omega}_0$$

où $\tilde{\omega}_0 \in C^0(]0,T[\,, L^1(\mathbf{R}^2) \cap L^\infty(\mathbf{R}^2))$ est une solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \tilde{\omega}_0 + u \cdot \nabla \tilde{\omega}_0 - \Delta \tilde{\omega}_0 = 0 \\ \tilde{\omega}_0(t,\cdot) \rightharpoonup \mu_0 \quad \text{quand} \quad t \to 0^+, \end{array} \right. \tag{25}$$

et où $\omega_i \in C^0(]0,T[\,, L^1(\mathbf{R}^2) \cap L^\infty(\mathbf{R}^2))$ est une solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \omega_i + u \cdot \nabla \omega_i - \Delta \omega_i = 0 \\ \omega_i(t,\cdot) \rightharpoonup \alpha_i \delta_{z_i} \quad \text{quand} \quad t \to 0^+. \end{array} \right. \tag{26}$$

Notons que l'on donne un sens à ces équations en utilisant la représentation intégrale comme dans (16),(17).
Une fois cette décomposition effectuée, il est naturel de retrancher à la fonction ω_i, pour i dans $\{1,\ldots,N\}$, le tourbillon d'Oseen associé à la donnée $\alpha_i \delta_{z_i}$. On pose ainsi

$$\forall i \in \{1,\ldots,N\}, \quad \omega_i(t,x) = \frac{\alpha_i}{t} G\left(\frac{x-z_i}{\sqrt{t}}\right) + \alpha_i \tilde{\omega}_i(t,x),$$

et l'on peut donc décomposer toute solution de l'équation du tourbillon de la manière suivante :

$$\omega(t,x) \;=\; \sum_{i=1}^N \frac{\alpha_i}{t} G\Big(\frac{x-z_i}{\sqrt{t}}\Big) + \tilde{\omega}(t,x), \quad u(t,x) \;=\; \sum_{i=1}^N \frac{\alpha_i}{\sqrt{t}} v^G\Big(\frac{x-z_i}{\sqrt{t}}\Big) + \tilde{u}(t,x),$$

où

$$\tilde{\omega}(t,x) \;=\; \tilde{\omega}_0(t,x) + \sum_{i=1}^N \alpha_i \tilde{\omega}_i(t,x), \quad \text{et} \quad \tilde{u}(t,x) \;=\; \tilde{u}_0(t,x) + \sum_{i=1}^N \alpha_i \tilde{u}_i(t,x),$$

et où, pour $i \in \{0,\ldots,N\}$, le champ $\tilde{u}_i$ est le champ de vitesses associé à $\tilde{\omega}_i$ via la loi de Biot et Savart.
La démarche va maintenant consister à démontrer que tous les termes de "reste" (c'est-à-dire les termes "tildés" dans la décomposition) sont petits, au moins sur un petit intervalle de temps. Si l'on parvient à montrer un tel résultat, alors tout l'intérêt de cette décomposition est le suivant : considérons deux solutions associées à la même donnée initiale. On peut toutes deux les décomposer ainsi, et les termes "grands" (qui traditionnellement seraient un obstacle à l'unicité par une méthode de type Gronwall) sont alors les mêmes pour les deux solutions. Seuls les restes diffèrent, et ceux-ci sont petits pour un temps petit — l'unicité étant une affaire de temps court, cela suffira pour démontrer le théorème.

Il s'agit donc maintenant dans une première étape de vérifier que les termes de reste sont effectivement petits sur un petit intervalle de temps, et dans une seconde étape, d'implémenter l'argument de bootstrap final assurant l'unicité.

Étude de la partie diffuse. Commençons par nous intéresser à la partie diffuse $\tilde{\omega}_0$. Comme par hypothèse $\|\mu_{0,\mathrm{pp}}\|_{\mathcal{M}} \leq \varepsilon$, on peut montrer comme pour le Lemme 3.5 que, pour tout p dans $]1,+\infty]$,

$$\limsup_{t\to 0^+} \|\tilde{\omega}_0\|_{X_{p,t}} \leq C\varepsilon.$$

En outre, cet argument peut être adapté pour montrer que ce tourbillon n'interagit pas, au moins en temps petit, avec des fonctions localisées en les z_i. Ainsi soit $\chi : [0,+\infty[\to \mathbf{R}^+$ une fonction continue, décroissante, vérifiant $\chi(0) = 1$ et $\chi(r) \to 0$ quand $r \to \infty$. Alors pour tout $i \in \{1,\ldots,N\}$, on a

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} t^{1-\frac{1}{p}} \|\tilde{\omega}_0(t,x)\chi(\tfrac{|x-z_i|^2}{t})\|_{L^p(\mathbf{R}^2)} = 0, \quad 1 \leq p \leq +\infty, \\ \lim_{t\to 0} t^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}} \|\tilde{u}_0(t,x)\chi(\tfrac{|x-z_i|^2}{t})\|_{L^q} = 0, \quad 2 < q \leq +\infty. \end{aligned}$$

Étude du reste. Pour étudier les $\tilde{\omega}_i$ pour $i \in \{1, \ldots, N\}$, on adapte la démarche de Th. Gallay et C. E. Wayne dans [21], dont le principe est esquissé en section 3.3 ci–dessous. On constate en effet que le reste $\tilde{\omega}_i$ se comporte comme une solution de l'équation du tourbillon dont la mesure initiale ne chargerait pas le point z_i, à des termes de reste près dus au fait que le champ de vitesses de (26) est u et non pas le champ de vitesse u_i associé à ω_i par Biot-Savart. Plus précisément, si l'on utilise à nouveau le changement de variables parabolique (21) en posant

$$\omega_i(t,x) = \frac{1}{t} w_i\Big(\log(t), \frac{x - z_i}{\sqrt{t}}\Big),$$

on obtient pour w_i l'équation suivante :

$$\partial_\tau w_i + v_i \cdot \nabla w_i + R_i \cdot \nabla w_i = \mathcal{L} w_i, \tag{27}$$

où $\mathcal{L}$ est l'opérateur de Fokker-Planck (23) et où

$$R_i(\tau, \xi) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} v_j(\tau, \xi - (z_j - z_i) e^{-\frac{\tau}{2}}) + e^{\frac{\tau}{2}} \tilde{u}_0(e^\tau, \xi e^{\frac{\tau}{2}} + z_i). \tag{28}$$

En reprenant les méthodes de [21] on peut montrer que pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$ et tout $m > 1$, le reste $\tilde{w}_i$ défini par $w_i = \alpha_i G + \alpha_i \tilde{w}_i$ vérifie

$$\|\tilde{w}_i(\tau)\|_{L^2(m)} \to 0 \quad \text{quand} \quad \tau \to -\infty, \tag{29}$$

où

$$L^q(m) = \Big\{ w \in L^q(\mathbf{R}^2) \;/\; \|w\|_{L^q(m)} < \infty \Big\}, \quad \text{avec} \quad \|w\|_{L^q(m)} = \|(1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}} w\|_{L^q}. \tag{30}$$

Nous ne détaillons pas la démonstration de ce résultat ici, qui repose sur des techniques de comportement asymptotique que nous présenterons dans la section suivante, jointes au fait que le terme R_i est négligeable, au sens où

$$\forall q \in]1, 2[, \; \forall m > 1, \quad \lim_{\tau \to -\infty} \|R_i(\tau) w_i(\tau)\|_{L^q(m)} = 0.$$

Ce dernier résultat s'obtient en remarquant que

$$\|R_i(\tau) w_i(\tau)\|_{L^q(m)} \leq C \|(1 + |\cdot|^2)^{-\frac{1}{2}} R_i(\tau)\|_{L^q(\mathbf{R}^2)}$$

où la constante C dépend de la norme $L^2(m+1)$ de w_i, dont on montre qu'elle est uniformément bornée. Mais

$$\begin{aligned} \|(1 + |\cdot|^2)^{-\frac{1}{2}} R_i(\tau)\|_{L^q(\mathbf{R}^2)} \quad \leq \quad & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \Big\| (1 + |\cdot|^2)^{-\frac{1}{2}} v_j(\tau, \cdot - (z_j - z_i) e^{-\frac{\tau}{2}}) \Big\|_{L^q(\mathbf{R}^2)} \\ & + e^{\frac{\tau}{2}} \Big\| (1 + |\cdot|^2)^{-\frac{1}{2}} \tilde{u}_0(e^\tau, \cdot e^{\frac{\tau}{2}} + z_i) \Big\|_{L^q(\mathbf{R}^2)} \end{aligned}$$

donc pour τ proche de $-\infty$ on a

$$\|R_i(\tau) w_i(\tau)\|_{L^q(m)} \leq C e^{\nu \frac{\tau}{2}} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \Big\| (1 + |\cdot|^2)^{\frac{\nu}{2}} v_j \Big\|_{L^q(\mathbf{R}^2)} + t^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}} \left\| \tilde{u}_0(t, \cdot) \left(1 + \frac{|\cdot - z_i|^2}{t} \right)^{-\frac{1}{2}} \right\|_{L^q(\mathbf{R}^2)}$$

avec $0 < \nu < 1 - 2/q$. Le résultat est démontré.

Remarquons que les techniques présentées dans la section suivante concernent l'asymptotique en temps grand (τ tend vers $+\infty$ et non pas $-\infty$), mais la démonstration de (29) repose sur le même type d'argument : il suffit de remplacer l'ensemble Ω-limite introduit au paragraphe 3.3 ci-dessous en (35), par l'ensemble $\mathcal{A}$-limite défini en (36), et de reprendre ensuite la même démarche.

Démonstration de l'unicité. Rappellons que la différence entre deux solutions de l'équation du tourbillon réside dans les termes de reste. La fin de la démonstration consiste donc à écrire les équations vérifiées par les restes $\tilde{\omega}_i$, pour i dans $\{0, \dots, N\}$, puis par les différences entre deux restes associés à deux solutions différentes, et à leur appliquer un argument de Gronwall. Nous n'écrirons pas tous les détails ici, mais il reste quelques obstacles techniques. Les difficultés restantes sont de deux types : d'abord l'équation pour le reste $\tilde{\omega}$ contient des termes de transport et de réaction dus aux tourbillons d'Oseen (termes linéaires mais grands), qu'il faut savoir contrôler. D'autre part, les estimations de tous les termes intervenant dans l'équation doivent être indépendantes de N, puisqu'en général N tend vers l'infini quand ε tend vers zéro. Cela est rendu possible par les estimations d'Osada et Carlen-Loss rappellées dans le paragraphe précédent : les constantes intervenant dans les inégalités ne dépendent que de la norme des mesures initiales, elles-mêmes contrôlées par la norme de μ (indépendante de N bien sûr).

Nous allons simplement écrire les équations intégrales satisfaites par le reste $\tilde{\omega}$ d'une solution ω (celles sur la différence de deux solutions sont du même type), en distingant la partie "diffuse" $\tilde{\omega}_0$ du reste $\tilde{\omega}_i$ pour $i \in \{1, \dots, N\}$, et énoncer quelques résultats répondant aux difficultés évoquées ci-dessus.
Les équations sont les suivantes : pour la partie "diffuse", l'équation (25) devient

$$\tilde{\omega}_0(t) \;=\; S_N(t,0)\mu_0 - \int_0^t S_N(t,s)\nabla \cdot (\tilde{u}(s)\tilde{\omega}_0(s))\, ds, \tag{31}$$

où S_N est l'opérateur d'évolution associé à l'équation de transport-diffusion par le champ

$$U(t,x) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\alpha_i}{\sqrt{t}}\, v^G\Big(\frac{x - z_i}{\sqrt{t}}\Big).$$

D'autre part pour $i \in \{1, \dots, N\}$ et $-\infty < \tau < \log(T)$, en retranchant à (27) l'équation (linéaire) satisfaite par $\alpha_i G$ il vient pour $\tilde{w}_i$ l'équation intégrale suivante :

$$\tilde{w}_i(\tau) \;=\; -\int_{-\infty}^{\tau} T_{\alpha_i}(\tau - \tau')\nabla \cdot \Big(\alpha_i \tilde{v}_i(\tau')\tilde{w}_i(\tau') + R_i(\tau')(G + \tilde{w}_i(\tau'))\Big)\, d\tau', \tag{32}$$

où R_i est défini en (28), et où T_{α_i} est le propagateur associé à l'équation

$$\frac{\partial \tilde{w}_i}{\partial \tau} + \alpha_i(v^G \cdot \nabla \tilde{w}_i + \tilde{v}_i \cdot \nabla G) = \mathcal{L}\tilde{w}_i.$$

Les deux difficultés évoquées ci-dessus consistent donc d'abord à estimer les propagateurs S_N et T_{α_i} uniformément en N dans une norme de point fixe ($X_{p,T}$ pour S_N et $C^{(}[0,T]; L^2(m))$ pour T_{α_i}), puis à estimer convenablement le terme R_i.

Concernant les estimations de propagateurs on peut montrer les bornes suivantes (voir [16]) : pour tout $p \in [1, \infty]$, il existe une constante C ne dépendant pas de N telle que pour toute mesure $\nu \in \mathcal{M}(\mathbf{R}^2)$,

$$\|S_N(t,s)\nu\|_{L^p} \leq \frac{C}{(t-s)^{1-\frac{1}{p}}}\|\nu\|_{\mathcal{M}}, \quad 0 \leq s < t.$$

En outre pour tout $\gamma \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$, il existe une constante C et il existe $t_0 > 0$, ne dépendant pas de N, tels que pour tout $f \in L^1(\mathbf{R}^2)$,

$$\|S_N(t,s)\nabla f\|_{L^p} \leq \frac{C}{(t-s)^{\frac{3}{2}-\frac{1}{p}}}\Big(\frac{t}{s}\Big)^{\gamma}\|f\|_{L^1}, \quad 0 < s < t < s + t_0.$$

La première estimation découle des bornes gaussiennes sur le noyau des équations de transport-diffusion. La seconde estimation est plus délicate à obtenir. L'idée est d'abord de traiter le cas d'un seul vortex (ce qui correspond à étudier le semi-groupe engendré par une équation d'evolution non autonome, qui s'avère être une perturbation compacte de $e^{\tau\mathcal{L}}$, semi-groupe étudié dans [21] ; le spectre de $\mathcal{L}$ en particulier est rappellé dans la section 3.3 ci-dessous). Le cas de N vortex s'obtient alors en constatant que les N termes de transport sont pour ainsi dire découplés, en tous cas pour un temps assez court.
Enfin on peut montrer aussi, si w est de moyenne nulle, que

$$\forall m > 2, \quad \|T_\alpha(\tau)w\|_{L^2(m)} \leq Ce^{-\frac{\tau}{2}}\|w\|_{L^2(m)}, \quad \tau \geq 0,$$

et si $q \in]1,2]$ et $m > 2$, on a alors

$$\|T_\alpha(\tau)\nabla w\|_{L^2(m)} \leq C\frac{e^{-\frac{\tau}{2}}}{a(\tau)^{\frac{1}{q}}}\|w\|_{L^q(m)}, \quad \tau > 0, \tag{33}$$

avec $a(\tau) = 1 - e^{-\tau}$. Là encore les constantes ne dépendent que des données du problème, et en particulier pas de N.

Une fois ces bornes obtenues, il ne reste plus qu'à estimer tous les termes sous l'intégrale, dans (31) et (32). On constate alors que dans ces termes interviennent d'une part des produits de deux termes de type reste (deux termes "tildés"), qui sont facilement contrôlables puisque comme nous l'avons vu ci-dessus, ces restes sont petits en temps petit. D'autre part on voit apparaître des termes d'interactions, par exemple entre des termes localisés en des points différents. Là encore on peut montrer que sur des temps assez petits ces interactions sont négligeables. Ainsi si M dénote une norme de point fixe, du type $M(t) = \max\{M_0(t), M_1(t), \ldots, M_N(t)\}$, où

$$M_0(t) = \sup_{0<s\leq t} s^{\frac{1}{4}}\|\tilde{\omega}_0(s)\|_{L^{\frac{4}{3}}}, \quad M_i(t) = \sup_{-\infty<\tau'\leq \log(t)}\|\tilde{w}_i(\tau')\|_{L^2(m)}, \quad i \in \{1, \ldots, N\},$$

alors on montre finalement l'inégalité suivante :

$$M(t) \leq \delta(t) + \eta(t)M(t) + CM(t)^2, \quad 0 < t < t_0,$$

où C ne dépend que des données du problème, et en particulier pas de N ni de ε, où $\eta(t)$ tend vers zéro avec t, et où $\delta(t) \leq C\varepsilon$ si $t > 0$ est assez petit. Ces deux fonctions $\eta(t)$, $\delta(t)$ dépendent de la mesure initiale μ. Ce type d'inégalité permet classiquement de conclure à l'unicité par un argument de type Gronwall. Nous omettons les détails.

3.3 Convergence globale vers les vortex d'Oseen

Dans cette dernière section, nous allons nous intéresser au comportement asymptotique des solutions de l'équation du tourbillon. Dans cette partie encore c'est la formulation en variables autosimilaires qui permet d'étudier le problème le plus aisément. Nous allons donc commencer cette étude en présentant le cadre fonctionnel, dans le paragraphe 3.3.1 suivant : on travaillera dans des espaces L^2 à poids dans les variables remises à l'échelle. Suivant le poids (qui mesure le taux de décroissance des fonctions à l'infini), le spectre de l'opérateur de Fokker-Planck $\mathcal{L}$ est plus ou moins décalé à gauche de l'axe imaginaire ; nous présentons ces résultats dans le paragraphe 3.3.2. Enfin la convergence vers les vortex d'Oseen est l'objet du paragraphe 3.3.3.

3.3.1 Le cadre de l'étude

Pour étudier l'asymptotique en temps grand, il est utile de se placer dans un cadre fonctionnel dans lequel les fonctions ont une certaine décroissance à l'infini – c'est un phénomène classique en équations paraboliques. On travaillera donc dans l'espace $L^2(m)$ défini en (30). L'équation du tourbillon (en variables autosimilaires) est bien posée dans cet espace. Rappellons ici cette équation :

$$\partial_\tau w + v \cdot \nabla_\xi w = \Delta_\xi w + \frac{1}{2}(\xi \cdot \nabla_\xi) w + w, \tag{34}$$

et l'on rappelle qu'on a défini l'opérateur

$$\mathcal{L} w = \Delta_\xi w + \frac{1}{2}(\xi \cdot \nabla_\xi) w + w.$$

Proposition 3.11 *Soit w_0 un élément de $L^2(m)$ pour $m > 1$. Alors il existe une unique solution w à (34), telle que $w \in C(\mathbf{R}^+; L^2(m))$, et la norme de $w(\tau)$ dans $L^2(m)$ est contrôlée par celle de w_0 uniformément en τ.*

La démonstration de l'existence et l'unicité locale en temps dans $L^2(m)$ se fait sans difficulté. Pour montrer que cette solution est en fait globale, on écrit une estimation d'énergie dans $L^2(m)$ et l'on montre que la norme $L^2(m)$ reste contrôlée pour tout temps. Nous renvoyons à [20] pour les calculs détaillés.

3.3.2 Le spectre de $\mathcal{L}$

L'opérateur $\mathcal{L}$ a des propriétés spectrales particulièrement intéressantes dans les espaces $L^2(m)$. On peut en effet montrer que le spectre de $\mathcal{L}$ dans $L^2(m)$ s'écrit

$$\sigma_m(\mathcal{L}) = \left\{ -\frac{k}{2}, k \in \mathbf{N} \right\} \cup \left\{ \lambda \in \mathbf{C} \,/\, \mathrm{Re}\, \lambda \leq \frac{1-m}{2} \right\}.$$

La première partie du spectre découle du fait que $\mathcal{L}$ est conjugué à l'oscillateur harmonique. On a en effet

$$e^{\frac{\xi^2}{8}} \mathcal{L} e^{-\frac{\xi^2}{8}} = \Delta + \frac{1}{2} - \frac{\xi^2}{16}.$$

Les fonctions propres associées aux valeurs propres $-k/2$ sont les fonctions d'Hermite. On retrouve en particulier le tourbillon d'Oseen comme première fonction propre, associée à la valeur propre zéro.
La seconde partie du spectre s'obtient en écrivant l'opérateur en variables de Fourier. On obtient ainsi un opérateur d'ordre 1, qui permet de trouver le spectre en λ tel que $\mathrm{Re}\, \lambda \leq \frac{1-m}{2}$.
On montre classiquement qu'on a là tout le spectre en vérifiant qu'en dehors des vecteurs propres associés aux valeurs propres isolées $-k/2$, le semi-groupe décroît comme $e^{-\frac{m-1}{2}\tau}$.

3.3.3 Convergence vers le vortex d'Oseen

Nous allons démontrer le théorème suivant.

Théorème 3.12 *Soit w_0 dans $L^2(m)$ avec $m > 1$, et soit $\alpha = \int_{\mathbf{R}^2} w_0(\xi)\, d\xi$. Alors la solution w associée vérifie*

$$\lim_{\tau \to +\infty} \| w(\tau) - \alpha G \|_{L^2(m)} = 0.$$

La démonstration se fait en plusieurs étapes, que nous décrivons brièvement ci-dessous.

Compacité. On peut montrer que la trajectoire $(w(\tau))_{\tau\geq 0}$ est relativement compacte dans $L^2(m)$. C'est en effet facile à voir pour $e^{\tau\mathcal{L}}w_0$, qui converge vers αG pour τ grand. Pour le terme de type Duhamel ce résultat de compacité suit du fait que le terme Duhamel s'avère être borné dans $H^1(m+1)$ (défini par la norme $\|\cdot\|_{L^2(m)}+\|\nabla\cdot\|_{L^2(m)}$), qui s'injecte de manière compacte dans $L^2(m)$.

Ensemble Ω-limite. On définit l'ensemble Ω-limite de $(w(\tau))_{\tau\geq 0}$ par

$$\Omega = \Big\{ w_\infty \in L^2(m) \Big/ \exists \tau_n \to +\infty \ \text{ t.q. } \ w(\tau_n) \to w_\infty \Big\} . \tag{35}$$

Il est classique de montrer que cet ensemble est non vide, compact, invariant, et qu'il attire toute la trajectoire, au sens où la distance dans $L^2(m)$ de $w(\tau)$ à Ω tend vers zéro quand τ tend vers l'infini. Remarquons que les mêmes propriétés sont vraies pour l'ensemble $\mathcal{A}$-limite, défini pour toute trajectoire complète $\{w(\tau)\}_{\tau\in\mathbf{R}}$ par

$$\mathcal{A} = \Big\{ w_\infty \in L^2(m) \Big/ \exists \tau_n \to -\infty \ \text{ t.q. } \ w(\tau_n) \to w_\infty \Big\} . \tag{36}$$

Première fonction de Lyapunov. On remarque aisément que pour tout $\tau\geq 0$, on a

$$\int_{\mathbf{R}^2} |w(\tau,\xi)|\, d\xi \leq \int_{\mathbf{R}^2} |w_0|\, d\xi,$$

avec égalité si et seulement si w_0 est de signe constant presque partout. Par le principe d'invariance de La Salle, on en déduit que les éléments de Ω sont de signe constant. On suppose dorénavant que $\alpha\geq 0$.

Deuxième fonction de Lyapunov. Nous avons vu au paragraphe 3.2.3 que l'entropie relative

$$H(f) \ = \ \int f(\xi)\log\Big(\frac{f(\xi)}{G(\xi)}\Big)\, d\xi$$

est une fonction de Lyapunov : en effet

$$H(w(\tau)) \leq H(w_0) \quad \forall \tau\geq 0,$$

avec égalité si et seulement si $w_0 = aG$ pour un certain $a\geq 0$. On déduit du principe d'invariance de La Salle que les éléments de Ω sont du type aG, avec $a\geq 0$. Par conservation de la masse on a nécessairement que $a=\alpha$, donc $\Omega=\{\alpha G\}$ et le Théorème 3.12 est démontré.

3.4 Références et remarques

La démonstration du Théorème 3.1 est due à [5].
L'étude de l'équation du tourbillon avec donnée initiale mesure a fait l'objet de travaux depuis plusieurs années. C'est d'abord l'existence globale de solutions qui a été démontrée, par G.-H. Cottet [10] et Y. Giga, T. Miyakawa et H. Osada [23] indépendamment. Leur méthode de démonstration repose sur la régularisation du système, et passage à la limite au sens des mesures (comme pour le théorème de Leray présenté au paragraphe 2.1, ce passage à la limite est rendu possible par l'exploitation de l'effet régularisant du Laplacien). Ce type de méthode ne permet pas de montrer l'unicité des solutions. L'unicité a été obtenue par G.-H. Cottet, par un argument de type Gronwall, pour des mesures initiales petites, et c'est à Y. Giga, T. Miyakawa et H. Osada que l'on doit le Lemme 3.5 qui permet de démontrer l'unicité pour toute mesure

dont la partie atomique est assez petite. Le cas d'une masse de Dirac est traité, plus de quinze ans plus tard, par Th. Gallay et C. E. Wayne dans [21] ; la démonstration utilise des fonctions de Lyapunov, alors que la démonstration utilisant les réarrangements est plus récente et figure dans [17]. Enfin le résultat final d'unicité pour toute mesure initiale est dû à [16].

Le Théorème 3.12 est dû à [21]. Dans cet article les auteurs obtiennent même un taux de convergence exponentiel en $e^{-\mu\tau}$, pour tout $\mu < \min(\frac{1}{2}, \frac{m-1}{2})\cdot$ En outre des résultats similaires sont obtenus pour une donnée initiale dans $L^1(\mathbf{R}^2)$ seulement, et la norme dans laquelle est mesurée la convergence (en variables originales) est la norme à poids "à la Kato" habituelle.

Bibliographie

[1] A. Alvino, P.-L. Lions, and G. Trombetti. On optimization problems with prescribed rearrangements. *Nonlinear Anal. T.M.A.* **13** (1989), 185–220.

[2] A. Alvino, P.-L. Lions, and G. Trombetti. Comparison results for elliptic and parabolic equations via symmetrization: a new approach. *Differential Integral Equations* **4** (1991), 25–50.

[3] A. Arnold, P. Markowich, G. Toscani, and A. Unterreiter. On convex Sobolev inequalities and the rate of convergence to equilibrium for Fokker-Planck type equations. *Comm. Partial Differential Equations* **26** (2001), 43–100.

[4] C. Bandle. *Isoperimetric inequalities and applications*. Monographs and Studies in Mathematics **7**. Pitman, London, 1980.

[5] M. Ben-Artzi. Global solutions of two-dimensional Navier-Stokes and Euler equations. *Arch. Rational Mech. Anal.* **128** (1994), 329–358.

[6] M. Cannone, *Ondelettes, paraproduits et Navier–Stokes*, Diderot éditeur, Arts et Sciences, 1995.

[7] E. A. Carlen and M. Loss. Optimal smoothing and decay estimates for viscously damped conservation laws, with applications to the 2-D Navier-Stokes equation. *Duke Math. J.* **81** (1995), 135–157.

[8] J.-Y. Chemin. *Fluides parfaits incompressibles*, Astérisque **230**, 1995.

[9] J.-Y. Chemin, B. Desjardins, I. Gallagher et E. Grenier. *Basics of Mathematical Geophysics*, Oxford University Press, à paraître.

[10] G.-H. Cottet. Equations de Navier-Stokes dans le plan avec tourbillon initial mesure. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **303** (1986), 105–108.

[11] J.-M. Delort. Existence de nappes de tourbillon en dimension deux, *Journal of the American Mathematical Society* **4** (1991), 553–586.

[12] L. Escaurazia, G. A. Serëgin, V. Sverak. $L^{3,\infty}$-solutions of Navier-Stokes equations and backward uniqueness (en Russe) *Uspekhi Mat. Nauk* **58** (2003), 3–44; traduction dans *Russian Math. Surveys* **58** (2003), 211–250

[13] L. Euler, Principes généraux du mouvement des fluides. *Mém. Acad. Sci. Berlin* **1** (1755), 274–315.

[14] H. Fujita et T. Kato. On the Navier–Stokes initial value problem I, *Archive for Rational Mechanics and Analysis* **16**, (1964), 269–315.

[15] G. Furioli, P.-G. Lemarié et E. Terraneo. Unicité des solutions mild des équations de Navier–Stokes dans $L^3(\mathbf{R}^3)$ et d'autres espaces limites, *Revista Matematica Iberoamericana* **16**, (2000) 605–667.

[16] I. Gallagher et Th. Gallay. Uniqueness for the two-dimensional Navier-Stokes equation with a measure as initial vorticity, *Mathematische Annalen* **332** (2005), 287–327.

[17] I. Gallagher, Th. Gallay et P.-L. Lions. On the uniqueness of the solution of the two-dimensional Navier-Stokes equation with a Dirac mass as initial vorticity, à paraître dans *Math. Nachrichten*.

[18] I. Gallagher, D. Iftimie et F. Planchon. Asymptotics and stability for global solutions to the Navier–Stokes equations, *Annales de l'Institut Fourier*, **53**, 5 (2003), pages 1387–1424.

[19] Th. Gallay et C. E. Wayne. Long-time asymptotics of the Navier-Stokes and vorticity equations on $\mathbf{R}^3$. *R. Soc. Lond. Philos. Trans. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.* **360** (2002), 2155–2188.

[20] Th. Gallay et C.E. Wayne, Invariant manifolds and the long-time asymptotics of the Navier-Stokes and vorticity equations on $\mathbf{R}^2$, *Arch. Rat. Mech. Anal.* **163** (2002), 209-258

[21] Th. Gallay and C. E. Wayne. Global stability of vortex solutions of the two-dimensional Navier-Stokes equation. *Comm. Math. Phys.* **255** (2005), 97–129.

[22] P. Germain. Solutions globales d'énergie infinie de l'équation de Navier-Stokes 2D, *Notes aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences* **340**, (2005), 547–550.

[23] Y. Giga, T. Miyakawa, and H. Osada. Two-dimensional Navier-Stokes flow with measures as initial vorticity. *Arch. Rational Mech. Anal.* **104** (1988), 223–250.

[24] L. Hörmander. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators* I, Springer Verlag, 1990.

[25] T. Kato. Strong L^p solutions of the Navier–Stokes equations in $\mathbf{R}^m$ with applications to weak solutions, *Mathematische Zeitschrift* **187**, (1984), 471–480.

[26] P.-G. Lemarié-Rieusset. *Recent developments in the Navier-Stokes problem*, Chapman and Hall/CRC Research Notes in Mathematics, 431. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2002.

[27] J. Leray. Essai sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace, *Acta Matematica* **63** (1933), 193–248.

[28] J. Leray. Etude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique. *J. Math. Pures. Appl.* **12** (1933), 1–82.

[29] E. Lieb and M. Loss. *Analysis*. Graduate Studies in Mathematics **14**. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.

[30] P.-L. Lions. *Mathematical Topics in Fluid Mechanics*, Vol. I, Incompressible Models, Oxford Science Publications, 1997.

[31] P.-L. Lions. *Mathematical Topics in Fluid Mechanics*, Vol. II, Compressible Models, Oxford Science Publications, 1997.

[32] C. Marchioro et M. Pulvirenti. *Mathematical Theory of Incompressible Nonviscous Fluids*, Applied Mathematical Sciences, **96**, *Springer Verlag*, New York, 1994.

[33] S. Montgomery-Smith. Finite time blow up for a Navier-Stokes like equation, *Proc. Amer. Math. Soc.* **129** (2001), no. 10, 3025–3029.

[34] C.L.M.H. Navier. Mémoire sur les lois du mouvement des fluides, *Mém. Acad. Sci. Inst. France* **6** (1822), 389–440.

[35] F. Oru. Thèse de l'Ecole Normale Supérieure de Cachan, 1996.

[36] H. Osada. Diffusion processes with generators of generalized divergence form. *J. Math. Kyoto Univ.* **27** (1987), 597–619.

[37] V. Scheffer. An inviscid flow with compact support in space-time, *J. Geom. Anal.* **3** (1993), 343–401.

[38] A. Shnirelman,. On the nonuniqueness of weak solution of the Euler equation, *Comm. Pure Appl. Math.* **50** (1997), 1261–1286.

[39] E. Stein. *Harmonic Analysis*. Princeton University Press, 1993.

[40] G. G. Stokes. On the theories of the internal friction of fluids in motion, *Trans. Cambridge Phil. Soc* **8** (1845).

[41] M. Vishik. Incompressible flows of an ideal fluid with vorticity in borderline spaces of Besov type, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **32** (1999), 769–812.

[42] V. Yudovitch. Non stationary flows of an ideal incompressible fluid, *Zhurnal Vych Matematika* **3** (1963), pages 1032–1066.