Transport par un champ peu régulier

Nicolas DEPAUW

Grenoble, été 2005

Introduction

En géométrie différentielle, un champ de vecteur b sur une variété M de classe C^1 est une section continue du fibré tangent. Deux aspects lui sont attachés : d'une part $b(x)$ est un vecteur tangent à V en x, et donc peut s'écrire comme $D_t\gamma(0)$ pour une application $C^1(I, M)$ telle que $\gamma(0) = x$ (l'intervalle ouvert I contient 0). On peut donc se demander s'il existe une famille γ_x de courbes $C^1(I_x, M)$, paramétrées par $x \in \Sigma$ (éventuellement Σ est une sous-variété C^1 de codimension 1 dans M), telles que $D_t\gamma_x = b \circ \gamma_x$, et dont l'image $\cup_{x\in\Sigma}\gamma_x(I_x)$ recouvre un ouvert de M (contenant Σ). D'un autre coté, étant donné une fonction $u \in C^1(M, \mathbb{R})$, sa différentielle $du = D_x u$ est une 1 forme différentielle continue. On a donc un opérateur $(b \cdot D) : u \mapsto \langle Du, b\rangle$ linéaire continu de $C^1(M, \mathbb{R})$ dans $C^0(M, \mathbb{R})$, dont on peut se demander quel est le noyau. La dérivation du produit de composition de $u \circ \gamma_x$ met en évidence le lien entre les deux aspects : u est solution de $(b \cdot D)\, u = 0$ si et seulement si u est constante sur chaque orbite $\gamma_x(I_x)$.

Nous donnons dans ce cours les idées permettant d'appliquer ce programme avec moins de régularité que C^1.

Les deux premières parties, concernant l'unicité et l'existence, sont un exercice de réécriture de [13] dans un cadre plus géométrique. La partie trois, concenant un exemple de non unicité, suit littéralement [11].

Il reste à rédiger une partie 4, selon les lignes de [2] et [3] sur les flots lagrangiens, *ie* les familles convenables de solutions de l'équation différentielle ordinaire. On y parlerait aussi des solutions au sens de Filippov [14, 15, 16].

1 Unicité et renormalisation

1.1 Cadre général

Ω est un ouvert connexe (un domaine) de $\mathbb{R}^n$. La norme $|x|$ sur $\mathbb{R}^n$ est la norme euclidienne canonique. Un *champ de vecteur* b est une application $b = (b_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Il engendre l'opérateur $(b \cdot D) : \phi \mapsto \sum_i b_i\, D_i\, \phi = \langle D\, \phi, b\rangle$ différentiel linéaire du premier ordre (homogène) à coefficients variables, continu de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Notons $D\cdot$ l'opérateur de divergence $b \mapsto \sum_i D_i\, b_i$. Alors $(b \cdot D)\, \phi = D\cdot(\phi b) - \phi\, D\cdot b$.

Nous supposerons, sauf mention contraire, que b et $D\cdot b$ sont dans $L^q_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, pour un q dans $[1, \infty]$. Alors $(b \cdot D)$ s'étend en un opérateur linéaire continu de $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ dans $L^r_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ par la première formule, et de $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ dans $W^{-1,r}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ par la seconde, avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \leqslant 1$.

Lemme 1.1. *Soit b un champ dans $L^q_{loc}(\Omega)$ ainsi que $D\cdot b$, et u dans $L^p_{loc}(\Omega)$. Pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a $(b\cdot D)(\phi u) = \phi\,(b\cdot D)\,u + u\,(b\cdot D)\,\phi$ (dans $\mathcal{D}'(\Omega)$). Cette égalité est encore vrai si ϕ est dans $W^{1,\infty}_{loc}(\Omega)$,* ie *localement lipschitzienne.*

Preuve. Application des techniques du cours de distribution : tester l'égalité contre une fonction de $\mathcal{D}(\Omega)$. □

Remarque 1.2. Soit Ψ un C^1 difféomorphisme de Ω' dans Ω. Pour u localement bornée dans Ω, on note $u' = \Psi^* u$ la fonction $u\circ\Psi$ localement bornée dans Ω'. Si u est C^1, alors u' aussi et $D\,u' = (D\,u\circ\Psi)\,D\,\Psi$. À un champ b dans Ω, on voudrait associer le champ b' dans Ω' tel que $(b'\cdot D)\,u' = \Psi^*((b\cdot D)\,u) = ((b\cdot D)\,u)\circ\Psi$. Pour u de classe C^1, cela implique $(b'\cdot D)\,u' = \langle D\,u, b\rangle\circ\Psi = \langle (D\,u\circ\Psi)\,D\,\Psi, (D\,\Psi)^{-1}(b\circ\Psi)\rangle = \langle D\,u', b'\rangle$ et donc $b' = (D\,\Psi)^{-1}(b\circ\Psi)$ qui est bien localement borné dans Ω'. Mais on ne peut pas calculer sa divergence sans hypothèses supplémentaires de régularité !

1.2 Unicité des solutions positives

Nous suivons ici la présentation géométrique adoptée par Colombini et Lerner [6]

Définition 1.3. Soit b un champ de vecteur $L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Soit Σ une hypersurface C^1 dans Ω. On dit que b et Σ sont *transverses* au voisinage de $x_0 \in \Sigma$ si il existe un voisinage V de x_0 et $f \in C^1(V)$ avec

1. $V_0 = \{x \in V \mid f(x) = 0\} = V \cap \Sigma$;
2. il existe $c_0 > 0$ tel que $(b\cdot D)\,f \geqslant c_0$ pour presque partout dans V.

Dans ce cas, on note $V_\pm = \{x \in V \mid \pm f(x) > 0\}$. Remarquer que l'on peut choisir V convexe relativement compact dans Ω et f dans $C^1_b(\overline{V})$. Remarquer aussi que $|D\,f|^{-1} \leqslant c_0^{-1}\|b\|_\infty$ et $|b|^{-1} \leqslant c_0^{-1}\|D\,f\|_\infty$ presque partout dans V.

Théorème 1.4. *Soit b un champ de vecteur $L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Soit Σ une hypersurface C^1 dans Ω, transverse à b au voisinage de x_0. On suppose $D\cdot b$ dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Soit c dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ et u dans $L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ positive telle que $(b\cdot D)\,u = cu$. Si u est nulle sur V_-, et si $(c + D\cdot b)_+$ est localement bornée, alors u est nulle dans un voisinage de x_0.*

Démonstration. Soit $\phi \in C^1_c(\Omega)$. Alors $0 = \int_\Omega \phi((b\cdot D)\,u - cu) = \int_\Omega u(-(b\cdot D)\,\phi - (c + D\cdot b)\phi)$. Avec V et f donnés par la définition de la transversalité en x_0, on a même $0 \geqslant \int_{V_+} u(-(b\cdot D)\,\phi - (c + D\cdot b)_+\phi)$ dès que ϕ est $C^1_c(V)$ et positive. Notons L l'opérateur $-(b\cdot D) - (c + D\cdot b)_+$. On va construire une fonction ϕ vérifiant

1. ϕ est $C^1_c(V)$ et positive, et $\phi(x_0) > 0$;
2. il existe $c_1 > 0$ tel que $L\phi \geqslant c_1\phi$ presque partout dans V_+ ;

On arrive alors à $0 \geqslant \int_{V_+} u\phi$, et donc $u = 0$ dans un voisinage de x_0. Procédons à la construction requise, qui exploite les bornes supposées, en quatre étapes.

1. — Soit ψ une fonction $C^1_b(V)$ telle que $x_0 \in U = \{x \in V \mid \psi(x) > 0\}$ et $U_+ = U \cap V_+$ soit relativement compact dans V. On définit $\phi_1 = C_0\psi - f$. Alors $\phi_1 \in C^1(V)$ et $-(b\cdot D)\,\phi_1 = (b\cdot D)\,f - C_0\,(b\cdot D)\,\psi$. Donc $-(b\cdot D)\,\phi_1 \geqslant 0$ dans V, si C_0 est si petit que $c_0 \geqslant C_0\|b\|_\infty\|D\,\psi\|_\infty$. On vérifie que $\phi_1(x) < 0$ dans $V_+ \setminus U_+$.

2. — Soit χ une fonction $C^1(\mathbb{R})$ positive croissante telle que $\chi(s) > 0 \iff s > 0$. Posons $\phi_2 = \chi\circ\phi_1$. C'est une fonction $C^1(V)$, positive, et nulle dans $V_+ \setminus U_+$. De plus $-(b\cdot D)\,\phi_2 = \chi'(\phi_1)(-(b\cdot D)\,\phi_1) \geqslant 0$ dans V. Et $\phi_2(x_0) > 0$.

3. — Introduisons $\phi_3 = \phi_2 \exp(-C_1 f)$. Elle est $C^1(V)$, positive, et nulle dans $V_+ \setminus U_+$. De plus $L\phi_3 = (-(b\cdot D)\,\phi_2)\exp(-C_1 f) + \phi_2 L \exp(-C_1 f) \geqslant (C_1 c_0 - (c + D\cdot b)_+)\phi_3$ dans V. Donc il existe $c_1 > 0$ tel que $L\phi_3 \geqslant c_1 \phi_3$ dans V dès que C_1 est si grand que $C_1 c_0 > (c + D\cdot b)_+$. Et $\phi_3(x_0) > 0$.

4. — Soit θ une fonction $C^1_c(V)$, de troncature (*ie* à valeur dans $[0,1]$), égale à 1 au voisinage du compact $\overline{U_+}$, où donc $(b\cdot D)\,\theta = 0$. Posons $\phi = \theta\phi_3$. Alors ϕ est bien $C^1_c(V)$ et positive. On calcule $L\phi = \theta L\phi_3 - \phi_3\,(b\cdot D)\,\theta$. Or $\phi_3\,(b\cdot D)\,\theta = 0$ sur V_+, donc $L\phi = \theta L\phi_3 \geqslant c_1\phi$ dans V_+. Et $\phi(x_0) > 0$. □

Remarque 1.5. Toute la preuve est encore valide quand on remplace l'hypothèse de régularité C^1 sur (Σ et) f par l'hypothèse plus faible f est C^0 et $D\,f$ est $L^\infty(V)$, ce qui équivaut à f Lipschitz si on choisit V convexe par exemple.

On essaiera plus tard de relaxer l'hypothèse $(c + D\cdot b)_+$ bornée. Cette condition se lit directement sur la forme conservative de l'équation : $D\cdot ub = (c + D\cdot b)u$. Il est aussi intéressant dans certaines applications de relaxer la condition b borné. C'est possible si $x = (t,y) \in \Omega = I \times \mathbb{R}^m$ et $b = (1, a(t,y))$, et donc $(b\cdot D)\,u = D_t\,u + \langle D_y\,u, a\rangle$, quand $\Sigma = \{t = 0\} \times \mathbb{R}^m$.

En vue de la comparaison avec l'estimation *a priori* que l'on démontrera pour prouver l'existence de solution, il faut noter que ici, on suppose u dans L^∞_{loc} et $(c + D\cdot b)_+$ borné, alors que le cadre naturel serait plutôt u dans L^∞_{loc} et c_+ borné, ou bien u dans L^1_{loc} et $(c + D\cdot b)_+$. Ce cadre convient quand b possède une certaine régularité, liée à la renormalisation.

1.3 La formule de Leibniz et la renormalisation

L'unicité des fonctions u solutions de $(b\cdot D)\,u = 0$ découle directement de l'unicité des solutions positives dès que l'on peut montrer que $(b\cdot D)\,u = 0$ implique $(b\cdot D)(u^2) = 0$, où plus généralement $(b\cdot D)(\beta\circ u) = 0$ pour une fonction $\beta \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ avec $\beta(s) > 0$ si $s \neq 0$. Derrière cette réduction se cache en réalité la formule de Leibniz $(b\cdot D)(uv) = u\,(b\cdot D)\,v + v\,(b\cdot D)\,u$ ou la formule de dérivation $(b\cdot D)(\beta\circ u) = (\beta'\circ u)\,(b\cdot D)\,u$. Il est aussi important de savoir si $v\,(b\cdot D)\,u = (vb\cdot D)\,u$.

Il ne suffit pas que chacun des termes de ces formules aient un sens dans $\mathcal{D}'$ pour que ces égalités soient vraies. Nous construirons un exemple de champ b borné à divergence nulle et de fonction u bornée non nulle telle que $(b\cdot D)\,u = 0$ mais $(b\cdot D)(u^2) \neq 0$. Voyons des conditions supplémentaires sur b.

Définition 1.6. On note $B^n(y,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - y| < r\}$.

Soit ρ dans $\mathcal{D}(B^n(0,1))$, paire et positive, d'intégrale 1. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$

Soit $\nu \in \mathbb{N}$. On note $\rho_\nu(x) = \nu^n\rho(\nu x)$. On fixe une suite croissante K_ν de compacts dont la réunion vaut Ω et une suite croissante χ_ν de fonctions dans $\mathcal{D}(\Omega)$ de troncature valant 1 au voisinage de K_ν.

On définit l'opérateur linéaire R_ν continu de $\mathcal{D}'(\Omega)$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ par $R_\nu\,u = [(u\chi_\nu) * \rho_\nu]\chi_\nu$.

On note $[A,B]$ le commutateur $AB - BA$ de deux opérateurs.

Notons τ_z l'opérateur de translation $\tau_z u(x) = u(x - z)$.

Lemme 1.7. *Soit* $1 \leqslant p,q \leqslant \infty$ *tels que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ 1. *Soit* $b \in L^q_{loc}(\Omega)$ *tel que* $D\cdot b \in L^q_{loc}(\Omega)$

Alors pour tout $u \in L^p_{\rm loc}(\Omega)$, on peut ecrire $[(b\cdot D), R_\nu]u = T_\nu u + N_\nu u$ avec

$$T_\nu u \quad \int (\tau_z u - u)\langle D\,\rho_\nu(z), b - \tau_z b\rangle\, dz$$
$$N_\nu u = \int (\tau_z u - u)\rho_\nu(z)\tau_z(D\cdot b)\, dz,$$

dans $\{x \in \Omega \quad B^n(x,\nu^{-1}) \subset K_\nu\}$

Preuve. Par définition, $R_\nu\,(b\cdot D)\,u = R_\nu\, D\cdot(ub) - R_\nu(u\,D\cdot b)$. Comme $R_\nu\, u$ est régulier, $(b\cdot D)\,R_\nu\, u = \langle D\, R_\nu\, u, b\rangle$. Si $B^n(x,\nu^{-1}) \subset K_\nu$, on a

$$\langle D\, R_\nu\, u, b\rangle(x) = \int u(y)\langle D\rho_\nu(x-y), b(x)\rangle\, dy,$$
$$R_\nu\,(b\cdot D)\, u(x) = \int u(y)\langle D\rho_\nu(x-y), b(y)\rangle\, dy - \int u(y)(D\cdot b)(y)\rho_\nu(x-y)\, dy,$$
$$[(b\cdot D), R_\nu]u(x) = \int \langle D\rho_\nu(x-y), b(x)-b(y)\rangle u(y)\, dy + \int \rho_\nu(x-y)(D\cdot b)(y)u(y)\, dy$$

Les fonctions constantes v vérifient évidemment $[(b\cdot D), R_\nu]v = 0$. On peut donc soustraire à la fonction u la fonction constante $u(x)$. □

Remarque 1.8. On peut facilement étendre ce lemme quand, dans R_ν, la convolution par ρ_ν est modulée en x : on remplace $\rho_\nu * u(x)$ par $\Gamma_\nu u(x) \doteq \int u(y)\rho_\nu(x, x-y)\, dy$ où $\rho_\nu(x,z) = \nu^n\rho(x,\nu z)$. Maintenant $\rho(x,z)$ doit être dans $\mathcal{D}(\overline{\Omega}\times B^n(0,1)$, positive et pour tout x vérifier $\int \rho(x,z)\, dz = 1$. Alors apparaît dans le commutateur un troisième terme, $N'_\nu u$ avec

$$N'_\nu u = \int (\tau_z u - u)\langle D_1\,\rho_\nu(z), b\rangle\, dz$$

pour tout x tel que $B^n(x,\nu^{-1}) \subset K_\nu$. Dans T_ν, il faut remplacer $D\,\rho_\nu$ par $D_2\,\rho_\nu$.

Lemme 1.9. *Soit $1 \leqslant p,q,r \leqslant \infty$ tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} \leqslant \frac{1}{r}$ et $r < \infty$. Soit $b \in W^{1,q}_{loc}(\Omega)$ et $u \in L^p_{\rm loc}(\Omega)$. Alors $[R_\nu, (b\cdot D)]u \to 0$ dans $L^r_{\rm loc}(\Omega)$.*

Démonstration. C'est un raisonnement par densité en trois étapes.

Localisation. — Soit K un compact dans Ω. Il existe alors une fonction χ dans $\mathcal{D}(\Omega)$, de troncature, telle que, avec $u' = \chi u$ et $b' = \chi b$ et pour ν assez grand, $[R_\nu, (b\cdot D)]u = [R_\nu, (b'\cdot D)]u'$ sur K.

Borne. — On sait que $\|\tau_z u'\|_p = \|u'\|_p$ et que $\|\tau_z b' - b'\|_q \leqslant |z|\|D\,b'\|_q$. Donc on obtient facilement par l'inégalité de Young $\|[R_\nu, (b'\cdot D)]u'\|_r \leqslant C\|u'\|_p\|D\,b'\|_q$.

Convergence. — Si $p<\infty$, on sait même que $\|\tau_z u' - u'\|_p \to 0$ quand $|z|\to 0$, par densité des fonctions C^0_c dans L^p. On en déduit alors que $\|[R_\nu, (b'\cdot D)]u'\|_r \to 0$ quand $\nu\to\infty$. Si $p=\infty$, on peut choisir $1\leqslant p', q' < \infty$ avec $\frac{1}{p'}+\frac{1}{q'} = \frac{1}{r}$. Grâce à la borne on remplace b' par un b'' dans $W^{1,q}\cap W^{1,q'}$ avec $b'-b''$ arbitrairement petit dans $W^{1,q}$. On applique la convergence précédente à u' dans $L^{p'}$ et b'' dans $W^{1,q'}$. □

Remarque 1.10. On ne sait pas démontrer un tel résultat en supposant seulement b et $D\cdot b$ dans $L^q_{\rm loc}(\Omega)$ et $D\,b$ dans $L^1_{\rm loc}(\Omega)$, sauf évidemment si $p=\infty$.

Les propriétés de R_ν dans les espaces $L^p_{\rm loc}(\Omega)$ donnent immédiatement

Corollaire 1.11. *Soit $1 \leqslant p,q,r \leqslant \infty$ tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} \leqslant \frac{1}{r}$ et $r < \infty$. Soit $b \in W^{1,q}_{loc}(\Omega)$ et $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ tel que $(b\cdot D)\,u \in L^r_{loc}(\Omega)$. Alors il existe une suite u_ν dans $\mathcal{D}(\Omega)$ telle que*

- *$u_\nu \to u$ dans $L^p_{loc}(\Omega)$ si $p<\infty$, ou bien, si $p=\infty$, la suite u_ν est bornée dans $L^\infty_{loc}(\Omega)$ et converge vers u presque partout ;*
- *$(b\cdot D)\,u_\nu \to (b\cdot D)\,u$ dans $L^r_{loc}(\Omega)$.*

Noter que dès que b et $D{\cdot}b$ sont $L^q_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, et u est $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, avec $\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$, les affirmations $(b\cdot D)\,u \in L^r_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ et $D{\cdot}(ub) \in L^r_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ sont équivallentes. Voici quelques conséquences.

Corollaire 1.12. *Soit $b \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ et $u \in L^\infty_{loc}(\Omega)$ tel que $(b\cdot D)\,u \in L^1_{loc}(\Omega)$.*

1. *Si $v \in L^\infty_{loc}(\Omega)$ tel que $(b\cdot D)\,v \in L^1_{loc}(\Omega)$, alors $(b\cdot D)(uv) = u\,(b\cdot D)\,v + v\,(b\cdot D)\,u$.*
2. *Si $v \in L^\infty_{loc}(\Omega)$ tel que $D{\cdot}(vb) \in L^1_{loc}(\Omega)$, alors $(vb\cdot D)\,u = v\,(b\cdot D)\,u$.*
3. *Si $f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, alors $(b\cdot D)(f\circ u) = (f'\circ u)\,(b\cdot D)\,u$.*
4. idem *pour $f \in W^{1,\infty}_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que tout $x \in \mathbb{R}$ soit un point de Lebesgue pour la fonction $f' \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R})$.*

Preuve. L'égalité $(b\cdot D)(u_\nu v) = u_\nu\,(b\cdot D)\,v + v\,(b\cdot D)\,u_\nu$ a été vue au tout début du cours. Puisque $u_\nu \to u$ presque partout, avec des bornes uniformes en ν, par convergence dominée $u_\nu\,(b\cdot D)\,v \to u\,(b\cdot D)\,v$ dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ et par dualité $(b\cdot D)(u_\nu v) \to (b\cdot D)(uv)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. La convergence $v\,(b\cdot D)\,u_\nu \to v\,(b\cdot D)\,u$ dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ vient du corollaire.

On vient de voir que $v\,(b\cdot D)\,u = (b\cdot D)(uv) - u\,(b\cdot D)\,v$. Et par définition $(vb\cdot D)\,u = D{\cdot}(uvb) - u\,D{\cdot}(vb)$. En soustrayant la première égalité à la seconde, on obtient $u(v\,D{\cdot}b - D{\cdot}(vb) + (b\cdot D)\,v) = 0$.

Puisque $(b\cdot D)(f\circ u_\nu) = \langle D\,(f\circ u_\nu), b\rangle = (f'\circ u_\nu)\langle D\,u_\nu, b\rangle = (f'\circ u_\nu)\,(b\cdot D)\,u_\nu$, il suffit de passer à la limite dans chaque terme. Bien sûr $f\circ u_\nu$ et $f'\circ u_\nu$ convergent vers $f\circ u$ et $f'\circ u$ presque partout et avec des bornes uniformes en ν. Donc $(b\cdot D)(f\circ u_\nu) \to (b\cdot D)(f\circ u)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Et le corollaire précedent assure que $(f'\circ u_\nu)\,(b\cdot D)\,u_\nu \to (f'\circ u)\,(b\cdot D)\,u$ dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

On applique ce qui précède à $f_\nu = f * \rho_\nu$ (avec ici le noyau ρ dans $C^1_c((-1,1))$). Alors $f_\nu \to f$ uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$, et $f'_\nu \to f'$ en tout point de Lebesgue de f', donc partout. Donc $f_\nu\circ u \to f\circ u$ et $f'_\nu\circ u \to f'\circ u$ presque partout dans Ω, avec en prime des bornes uniformes dans $L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. On peut donc passer à la limite $\nu \to \infty$ dans tout les termes. □

Remarque 1.13. Exemples important de fonctions f non C^1 auxquelles le dernier point du corollaire s'applique : les fonctions continues affines par morceaux, comme $f(x) = |x|$ ou les fonctions de saturation $f(x) = \max(-M_-, \min(x, M_+))$.

(Suite de la remarque 1.10) Si b et $D{\cdot}b$ sont $L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ en plus de b dans $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, et si $w \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ vérifie $(b\cdot D)\,w \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, on ne sait pas montrer que $(b\cdot D)(\beta\circ w) = (\beta'\circ w)\,(b\cdot D)\,w$. De même, si w_i et $(b\cdot D)\,w_i$ sont dans $L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ pour $i=1,2$, on ne sait pas montrer que $(b\cdot D)(w_1w_2) = w_1\,(b\cdot D)\,w_2 + w_2\,(b\cdot D)\,w_1$.

Dans le cadre équation d'évolution $(b\cdot D) = D_t + a(t,x)\cdot D_x$, Di Perna et Lions [13] ont intensivement utilisé la propriété 3 dite de renormalisation, pour donner un sens à l'équation de transport même quand les exposants d'intégrabilité de u et b ne permettent pas de donner un sens dans L^1_{loc} aux produits ub et $u\,D{\cdot}b$. Leur concept de solution renormalisée est plus général que celui de solution faible (au sens des distributions) puisqu'il élargit la notion de solution, mais aussi plus exigeant puisque ces solutions possèdent automatiquement la propriété de renormalisation. En particulier elles sont uniques.

Si le régulariseur est radial : $\rho(z)$ ne dépend que de $|z|$, alors $D\rho(z)$ est proportionnel à z. Il suffit donc de controler la déformation $Eb = (D_j b_i + D_i b_j)_{i,j}$ du champ b dans L^q_{loc} au lieu de controler toutes ses dérivées $D b = (D_j b_i)_{i,j}$.

Colombini et Lerner [6] ont étendu l'argument de [13] au cas ou les dérivées de a sont des mesures ($i.e$ $a \in BV_{\text{loc}}$) et u est continue.

Puis ils ont montré [7] que pour u seulement bornée, on a encore la renormalisation (et donc aussi l'unicité) si a est *conormal BV* hors d'un fermé E de mesure de Hausdorff de codimension 1 nulle (nous verrons ce dernier point dans la section suivante).

Enfin Ambrosio [2] a montré qu'il suffit que a soit BV_{loc}, ce qui signifie que $D_x a$ est une mesure de Radon, même pour u seulement L^∞

Ambrosio a recemment étendu encore plus l'argument a des champs SBD, c'est-à-dire des champs dont on suppose seulement que la déformation est une mesure, qui se décompose en une partie régulière par rapport à la mesure de Lebesgue et une partie singulière, mais concentrée sur un ensemble rectifiable de codimension 1.

Dans ces travaux, on suppose toujours $D\cdot b$ dans $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, ne serait ce que pour donner un sens à $(b\cdot D)\,u$.

1.4 Singularités régulières

Un argument classique de capacité permet d'éliminer un ensemble suffisamment restreint de singularités pour l'équation.

Lemme 1.14. *Soit S un fermé tel que $\mathcal{H}^{n-1}(\Omega\cap S) = 0$. Alors pour tout compact $K \subset \Omega$ il existe une suite de fonctions χ_ν dans $C^1_c(\Omega)$, de troncature, telles que*

- *$\chi_\nu = 0$ sur un voisinage de $S\cap K$.*
- *$\chi_\nu \to 1$ presque partout dans K ;*
- *$D\chi_\nu \to 0$ dans $L^1(K)$;*

Preuve. $\mathcal{H}^{n-1}(\Omega\cap S) = 0$ donc pour tout $\nu \in \mathbb{N}$, il existe une suite $B_j = B^n(x_j, r_j)$ avec $\sup_j r_j \leqslant \nu^{-1}$, $\Omega\cap S \subset \bigcup_j B_j$ et $\sum_j r_j^{n-1} \leqslant \nu^{-1}$. Notons $\hat{B}_j = B^n(x_j, 2r_j)$. Comme $K\cap S$ est compact, il existe une sous-suite finie, notée B_i, telle que $K\cap S \subset \bigcup_i B_i$.

Soit $\tilde{\theta} \in C^1_c(B^n(0,2))$ une fonction de troncature égale à 1 sur un voisinage de $B^n(0,1)$. Posons $\theta_i(x) = \tilde{\theta}(r_i^{-1}(x - x_i))$ et $\varphi_\nu = \prod_i(1-\theta_i)$. Alors $\varphi_\nu \in C^1(\mathbb{R}^n)$.

De plus $\varphi_\nu = 0$ dans $\bigcup_i B_i$ qui est un voisinage de $K\cap S$, et $\varphi_\nu = 1$ dans $\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_i \hat{B}_i$. Notons que la mesure de $\bigcup_i \hat{B}_i$ est majorée par $C\sum_i r_i^n \leqslant C\nu^{-2}$ qui est sommable en ν. Donc φ_ν, qui dépend de ν par l'intermédiaire des B_i, tend vers 1 presque partout quand $\nu \to \infty$.

D'autre part $D\varphi_\nu = \sum_i(\prod_{i',i'\neq i}\theta_{i'})\,D\theta_i$ et donc $|D\varphi_\nu| \leqslant C\sum_i r_i^{-1}\mathbf{1}_{\hat{B}_i\setminus B_i}$. La mesure de $\hat{B}_i \setminus B_i$ est proportionnelle à r_i^n, donc $\|D\varphi_\nu\|_1 \leqslant C\nu^{-1}$.

Le seul défaut de φ_ν est son support, non compact dans Ω. Soit χ_K une fonction $C^1_c(\Omega)$, de troncature, égale à 1 au voisinage de K. Alors $\chi_\nu = \chi_K\varphi_\nu$ convient. □

Théorème 1.15. *Soit $b \in L^\infty_{loc}(\Omega)$ avec $D\cdot b \in L^1_{loc}(\Omega)$. Soit $u \in L^\infty_{loc}(\Omega)$ et $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. On suppose qu'il existe un fermé S tel que $(b\cdot D)\,u = f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega\setminus S)$. Si $\mathcal{H}^{n-1}(\Omega\cap S) = 0$ alors $(b\cdot D)\,u = f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Démonstration. Il s'agit de tester l'égalité $(b \cdot D)\, u = f$ contre une fonction ϕ quelconque dans $\mathcal{D}(\Omega)$. Notons K son support. Avec le lemme précédent, notons $u_\nu = u\chi_\nu$. Alors $(b \cdot D)\, u_\nu = \chi_\nu\,(b \cdot D)\, u + u\,(b \cdot D)\,\chi_\nu$. Le premier terme est égal à $\chi_\nu f$ dans K puisque $\chi_\nu = 0$ au voisinage de $K \cap S$. Le deuxième terme s'écrit $\langle D\chi_\nu, ub\rangle$. Donc $(b \cdot D)\, u_\nu$ converge vers f dans K. Par ailleurs, par dualité, $(b \cdot D)\, u_\nu$ converge vers $(b \cdot D)\, u$ dans $W^{-1,1}(K)$. □

1.5 Tout ensemble

Théorème 1.16. *Soit b dans $L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ avec $D\, b$ dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Soit c dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ et u dans $L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ solution de $(b \cdot D)\, u = cu$ dans $\Omega \backslash S$ pour un certain fermé S tel que $\mathcal{H}^{n-1}(\Omega \cap S) = 0$. Soit Σ une hypersurface C^1 dans Ω, transverse à b au voisinage de $x_0 \in \Sigma$. Soit ρ dans $L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ ainsi que ρ^{-1}, telle que $(\rho c + D\cdot(\rho b))_+$ soit dans $L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Supposons que $u = 0$ dans V_-.*

Alors $u = 0$ dans un voisinage de x_0.

Démonstration. cu dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ permet de retirer la singularité régulière : $(b \cdot D)\, u = cu$ dans Ω. L'hypothèse sur $D\, B$ autorise à renormaliser, par exemple avec $f(s) = |s|$. Donc $(b \cdot D)|u| = c|u|$ dans Ω. On applique à $|u|$ le résultat sur les fonctions positives, pour le champ $b' = \rho b$. En effet $(b' \cdot D)|u| = \rho c|u|$. Et $(b' \cdot D)\, f = \rho\,(b \cdot D)\, f > c_0\|\rho^{-1}\|^{-1}_\infty$. □

2 Existence de solutions

Soit b un champ dans $L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

On sait que la suite $b_\nu = R_\nu\, b$ de champs dans $\mathcal{D}(\Omega)$ est bornée dans $L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ et converge presque partout vers b.

Soit Σ une hypersurface C^1 dans Ω, transverse à b au voisinage de x_0.

Il existe $c_0 > 0$ tel que $(b \cdot D)\, f \geqslant c_0$ dans un voisinage V' de x_0. Donc, quitte à réduire un peu V' et c_0, il existe $c_0 > 0$ tel que, pour ν assez grand, $(b_\nu \cdot D)\, f \geqslant c_0$ dans V'.

Le flot de b_ν est une application Ψ_ν de classe C^1 de $\mathbb{R} \times \Omega$ dans Ω telle que $D_t\, \Psi_\nu(t,x) = b_\nu(\Psi_\nu(t,x))$ et $\Psi_\nu(0,x) = x$. Les $\Psi^t_\nu : x \mapsto \Psi_\nu(t,x)$, pour t variant dans $\mathbb{R}$, forment un groupe à 1 paramètre de C^1 difféomorphisme de Ω. Il existe un voisinage W de x_0 et $T' > 0$ tel que $\Psi_\nu((-T',T') \times W) \subset V'$ pour tout ν. Notons $W_0 = W \cap \Sigma$. Alors Ψ_ν est un C^1 difféomorphisme de $(-T',T') \times W_0$ dans son image $W_\nu = \Psi_\nu((-T',T') \times W_0) \subset V'$, pour ν assez grand.

Montrons l'injectivité. Pour tout $s \in W$, la fonction $t \mapsto f \circ \Psi_\nu(t,s)$ est nulle en $t = 0$ si $s \in W_0$, et en tout cas strictement croissante sur $(-T',T')$ si ν est assez grand, puisque sa dérivée est $((b_\nu \cdot D)\, f) \circ \Psi_\nu(t,s) \geqslant c_0$. Par la propriété de groupe, si $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 < T'$ et $\Psi_\nu(t_1,s_1) = \Psi_\nu(t_2,s_2)$ alors $s_1 = \Psi_\nu(t_2 - t_1, s_2)$, donc $t_2 = t_1$ et $s_1 = s_2$ si on suppose s_1 et s_2 dans W_0.

Soit $W_+ = \{x \in W \mid f(x) > 0\}$. Soit ψ dans $C^1_b(W)$ telle que $\psi(x_0) > 0$ et $\overline{U_+}$ soit compact dans W, avec $U_+ = \{x \in W_+ \mid \psi(x) > 0\}$. On définit $\phi_1 = C_0\psi - f$. Alors $\phi_1 \in C^1(W)$ et $(b_\nu \cdot D)\, \phi_1 = C_0\,(b_\nu \cdot D)\, \psi - (b_\nu \cdot D)\, f$. Donc $(b_\nu \cdot D)\, \phi_1 \leqslant 0$ dans W si C_0 est si petit que $C_0\|b_\nu\|_\infty\|D\,\psi\|_\infty \leqslant c_0$ pour tout ν. Notons $V_+ = \{x \in W_+ \mid \phi_1(x) > 0\} \subset U_+$, $F_+ = \overline{V_+}$ et $F_0 = F_+ \cap \Sigma = \overline{U_+} \cap \Sigma$ qui est compact relativement à W_0.

Montrons qu'il existe T tel que $0 < T < T'$ et $F_+ \subset \Psi_\nu([0,T] \times F_0)$ pour ν assez grand. Soit $x \in V_+$. La fonction $f \circ \Psi_\nu(t,x)$ a une dérivée minorée par c_0 dans $(-T',T')$ et vaut $0 < f(x) < C_0\psi(x)$ en $t = 0$. Donc pour C_0 si petit que $C_0\|\psi\|_\infty = c_0 T < c_0 T'$, la borne inférieure t_0 de l'ensemble des $t' \in (-T',0]$ tels que $f \circ \Psi_\nu(t,x) > 0$ si $t \in [t',0]$ vérifie

$t_0 \in (-T, 0)$. Mais la fonction $\phi_1 \circ \Psi_\nu(t,x)$ est décroissante et vaut $\phi_1(x) > 0$ en $t = 0$. Donc $s = \Psi_\nu(t_0, x) \in F_0$ et $x = \Psi_\nu(-t_0, s)$ avec $-t_0 \in (0, T)$.

Soit g dans $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ et c dans $L^q_{\text{loc}}(\Omega)$. On les régularise : $g_\nu = R_\nu\, g$ et $c_\nu = R_\nu\, c$.

Soit u_0 dans $L^p_{\text{loc}}(\Sigma)$. On la régularise pour disposer de $u_{0,\nu}$ dans $\mathcal{D}(\Sigma)$.

On peut maintenant résoudre par la méthode des caractéristiques le problème

$$\begin{cases} (b_\nu \cdot D)\, u_\nu = c_\nu u_\nu + g_\nu & \text{dans } W_\nu, \\ u_\nu = u_{0,\nu} & \text{dans } W_0. \end{cases} \qquad (1$$

En effet on cherche v_ν de classe C^1 dans $(-T', T') \times W_0$ telle que $v_\nu = u_\nu \circ \Psi_\nu$. Puisque $D_t\, v_\nu = (D\, u_\nu \circ \Psi_\nu)\, D_t\, \Psi_\nu = \langle D\, u_\nu, b_\nu\rangle \circ \Psi_\nu = (c_\nu u_\nu + g_\nu) \circ \Psi_\nu = d_\nu v_\nu + h_\nu$, on résoud explicitement cette équation différentielle ordinaire en t, paramétrée par $s \in W_0$, avec la donnée initiale $v_\nu(0, s) = u_{0,\nu}(s)$. On obtient ainsi v_ν de classe C^1 sur $(-T', T') \times W_0$, puis on pose $u_\nu(x) = v_\nu(t, s)$ si $x \in W_\nu$ et $x = \Psi(s, t)$.

On cherche maintenant une estimation *a priori* sur les solutions du système (1). On omet provisoirement l'indice ν, à charge de vérifier que les bornes utilisées sont uniformes en ν.

On vérifie aisément que $\|u \mid F_+\|_\infty \leqslant \|v\|_\infty \leqslant (\|u_0 \mid F_0\|_\infty + T\|g \mid F_+\|_\infty) \exp(T\|c_+ \mid F_+\|_\infty)$ On a utilisé que les régularisations n'augmentent pas la norme du sup.

Si $1 \leqslant p < \infty$, faisons l'hypothèse que $(c + p^{-1}\, D \cdot b)_+$ est $L^\infty_{\text{loc}}(\Omega)$ (uniformément en ν).

On vérifie en multipliant par $\operatorname{sgn}(u)$ que

$$\begin{cases} (b \cdot D)|u| = pc|u| + \operatorname{sgn}(u) g & \text{dans } F_+, \\ |u| = |u_0| & \text{dans } F_0. \end{cases}$$

Soit χ une fonction positive croissante dans $C^1(\mathbb{R})$ telle que $\chi(s) > 0$ si et seulement si $s > 0$. Posons $\phi_2 = \chi \circ \phi_1$. C'est une fonction $C^1(W)$, positive, et nulle dans $W_+ \setminus V_+$. On peut donc la prolonger à $W_{\nu+} = \Psi_\nu((0, T') \times W_0)$ par 0 dans $W_{\nu+} \setminus V_+$. De plus $(b \cdot D)\, \phi_2 = (\chi' \circ \phi_1)\, (b \cdot D)\, \phi_1$. Donc $(b \cdot D)\, \phi_2 \leqslant 0$ dans $W_{\nu+}$. Et $\phi_2(x_0) > 0$.

Introduisons $\phi = \phi_2 \exp(-C_1 f)$. Elle est $C^1(W_{\nu+})$, positive, et nulle dans $W_{\nu+} \setminus V_+$. De plus $(b \cdot D)\, \phi = ((b \cdot D)\, \phi_2) \exp(-C_1 f) - C_1 \phi (b \cdot D)\, f$. Donc $(b \cdot D)\, \phi \leqslant -C_1 c_0 \phi$ dans $W_{\nu+}$. Et $\phi(x_0) > 0$.

Alors $u_* = \phi|u|$ est solution du système suivant, où $g_* = \phi|g|$,

$$\begin{cases} (b \cdot D)\, u_* \leqslant (c - C_1 c_0) u_* + g_* & \text{dans } W_{\nu+} \\ u_* = \phi|u_0| & \text{dans } W_0. \end{cases}$$

On vérifie en multipliant par pu_*^{p-1} que dans W_ν

$$\begin{aligned} D \cdot (u_*^p b) &\leqslant p[c - C_1 c_0 + p^{-1}\, D \cdot b] u_*^p + p u_*^{p-1} g_* \\ &\leqslant p[c - C_1 c_0 + p^{-1}\, D \cdot b] u_*^p + (p \quad 1) u_*^p + g_*^p \leqslant -u_*^p + g_*^p \end{aligned}$$

pourvu que $(c - p^{-1}\, D \cdot b)_+ + 1 \leqslant C_1 c_0$, *ie* en choisissant C_1 assez grand par rapport à la borne sur $(c - p^{-1}\, D \cdot b)_+$, qui est uniforme en ν.

En intégrant sur $W_{\nu+}$, et en tenant compte de l'annulation de ϕ hors de V_+, on obtient l'estimation *a priori*

$$\int_{F_+} (\phi|u|)^p \leqslant \int_{F_+} (\phi|g|)^p + \int_{F_0} (\phi|u_0|)^p \langle D\, f, b\rangle |D\, f|$$

Ici, ni F_+ ni F_0 ni ϕ ne dépendent de ν, et ϕ est strictement positive sur l'intérieur V_+ de F_+ et sur l'intérieur de F_0 relativement à Σ auxquels x_0 appartient.

Restaurons les ν. On a obtenu une suite u_ν bornée dans L^p sur F_+. On peut donc extraire une sous-suite, encore notée u_ν qui converge vers un élément $u \in L^p(F_+)$, faiblement si $1 < p < \infty$ et *-faiblement si $p = \infty$. Si $p = 1$, la borne ne suffit pas. Mais si en plus de $(c + D\cdot b)_+$ borné, on suppose de plus que $(c - p_0^{-1} D\cdot b)_+$ est borné pour un certain $p_0 > 1$, alors on peut montrer que la suite u_ν est de plus équiintégrable, puisque par approximation de L^1 par $L^1 \cap L^{p_0}$, u_ν est la somme d'une suite petite (uniformément) dans L^1 et d'une suite bornée dans L^{p_0}. Alors, par le théorème de Dunford-Pettis, on peut encore en extraire une sous-suite qui converge dans L^1-faible.

La convergence faible des u_ν et la convergence forte des b_ν, c_ν, g_ν, permet de passer à la limite dans l'équation. Nous avons donc démontré le théorème .

Théorème 2.1. *Soit $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soit b un champ dans $L^\infty_{loc}(\Omega)$ avec $D\cdot b$ dans $L^q_{loc}(\Omega)$. Soit Σ une hypersurface C^1 dans Ω, transverse à b au voisinage de x_0. Soit g dans $L^p_{loc}(\Omega)$ et c dans $L^q_{loc}(\Omega)$. On suppose que $(c - p^{-1} D\cdot b)_+$ est dans $L^\infty_{loc}(\Omega)$ [si $p = 1$, on suppose de plus que $(c - p_0^{-1} D\cdot b)_+$ est dans $L^\infty_{loc}(\Omega)$ pour un $p_0 > 1$]. Soit u_0 dans $L^p_{loc}(\Sigma)$.*

Alors il existe un fermé F_+ et une fonction u dans $L^p(F_+)$ tels que :

- *$x_0 \in V_0$, où V_0 est l'intérieur relativement à Σ de $F_0 = F_+ \cap \Sigma$;*
- *l'intérieur V_+ de F_+ est non vide et du coté $f > 0$ de Σ ;*
- *u est solution dans $V_+ \cup V_0$ de $(b \cdot D)\, u = cu + g$ et $u_{|V_0} = u_0$.*

3 Un contre exemple

Voici, tiré de [11], un exemple qui montre que les conditions suffisantes pour l'unicité, la renormalisatione et la formule de Leibniz, que nous avons détaillées dans la section 1, sont d'un certain point de vue, près d'être optimales.

On considère un champ de vecteurs $a : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ borné à divergence nulle. On se pose la question de l'unicité des solutions $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ bornées de l'équation de transport

$$D_t u + D_x \cdot (au) = 0 \tag{T}$$

avec la condition de Cauchy $u(t, x) = 0$ pour $t = 0$.

On propose ici un exemple de champ de vecteurs a conormal BV hors de $\{0\} \times \mathbb{R}^d$ et une solution u bornée non nulle de (T), nulle sur $\{t < 0\}$.

3.1 Le champ a

L'esprit de la construction est proche d'un exemple dû à Aizenman [1], mais plus explicite. Signalons au passage que Colombini, Luo et Rauch ont revisité en détail l'exemple d'Aizenman dans [8]. Nous donnons d'abord le principe général de la construction et les estimations qui en découlent. Puis nous donnons les détails précis, et en même temps nous calculons le flot.

On pose $a(t, x) := 0$ pour $t < 0$ ou $t > 1$, et $a(t, x) := b(2^j x)$ pour $t \in I_j := 2^{-j}(\frac{1}{2}, 1)$ avec $j \in \mathbb{N}$. Le champ $b : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est choisi à divergence nulle, $\mathbb{Z}^d$-périodique : $b(x + k) = b(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et $k \in \mathbb{Z}^d$, et dans $BV_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$. On note $Q := (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^d$ le cube unité centré en 0 et $\|m\|_{M(\overline{Q})}$ la variation totale d'une mesure de Radon m sur $\overline{Q} := [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d$. Alors on obtient

$$\|a\|_{L^\infty} = \|b\|_{L^\infty}$$

$$\forall_{\mathrm{pp}} t \in I_j, \qquad \|a(t)\|_{L^1(Q)} = 2^{-jd}\|b\|_{L^1(2^jQ)} \quad \|b\|_{L^1(Q)};$$

$$\forall_{\mathrm{pp}} t \in I_j, \qquad 2^j \|D_x\, b\|_{M(Q)} \leqslant \|D_x\, a(t)\|_{M(\overline{Q})} \leqslant 2^j \|D_x\, b\|_{M(\overline{Q})};$$

$$\|\partial_{t,x} a\|_{M(\overline{I}_j \times \overline{Q})} \leqslant B := \frac{1}{2}\|D_x\, b\|_{M(\overline{Q})} \quad 2\|b\|_{L^1(Q)}$$

$$\|\partial_{t,x} a\|_{M(I_j \times \overline{Q})} \geqslant B' := \frac{1}{2}\|D_x\, b\|_{M(Q)}$$

Les deux dernières lignes assurent que X est à coefficient dans $BV_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^d)$ et que, quand $t = 2^{-j}$ tend vers 0, $\|\partial_{t,x} a\|_{M([t,1]\times\overline{Q})}$ est majoré par $-B\ln_2(t)$ et minorée par $-B'\ln_2(t)$.

À partir de maintenant, on fixe $d = 2$. Notons $\Lambda := \mathbb{Z}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + \mathbb{Z}(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ le réseau engendré par les coins de Q, et

$$b(x) := \sum_{k\in\Lambda} c(x-k),$$
$$c := \nabla^\perp V,$$
$$V(x) := 2\Big[\min\big(\frac{1}{4}, \max(|x_1|, |x_2|)\big)\Big]^2.$$

Le champ $c : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est $L^\infty \cap BV$. En effet $c(x) = (-4x_2, 0)$ sur $|x_1| < |x_2| < \frac{1}{4}$ et $c(x) = (0, 4x_1)$ sur $|x_2| < |x_1| < \frac{1}{4}$ et son support est $\frac{1}{2}\overline{Q}$. Sa divergence est nulle puisque c'est l'orthogonal d'un gradient. On retrouve cela en remarquant qu'il est affine par morceaux sur des triangles avec continuité de la composante normale sur les bords. Sans perdre en généralité, on définit ponctuellement $c = 0$ sur le bord $\{\max(|x_1|, |x_2|) = \frac{1}{4}\}$ du support.

En coordonnées polaires *carrées* (r, θ), où $r = 2\max(|x_1|, |x_2|)$ et θ représente l'abscisse curviligne du point $\frac{1}{r}x$ le long du carré $\partial Q = \{r = 1\}$ (dans $\mathbb{R}/4\mathbb{Z}$ et compté à partir du point $(\frac{1}{2}, 0)$), le flot au temps t s'écrit $(r, \theta) \mapsto (r, \theta + 2t)$ si $r < \frac{1}{2}$ et $(r, \theta) \mapsto (r, \theta)$ si $r \geqslant \frac{1}{2}$. En effet, le champ est autonome, 1-homogène dans $\frac{1}{2}Q$ et quand on se rapproche par l'intérieur du bord de $\frac{1}{2}Q$, qui est de longueur 2, la vitesse $|c|$ tend vers 1.

Le flot au temps $\frac{1}{2}$ de ce champ autonome vaut
- la rotation d'angle $\pi/2$ sur le carré $\frac{1}{2}Q$;
- l'identité hors de $\frac{1}{2}Q$.

Revenons à b, en remarquant que les carrés $k + \frac{1}{2}Q$, k décrivant Λ, sont disjoints et se touchent par leurs coins, comme les cases noires d'un damier. On peut donc définir son flot, à partir de celui de c.

Alors le flot au temps $\frac{1}{2}$ de $b(x)$ vaut
- la rotation de centre k et d'angle $\pi/2$ sur le carré $k + \frac{1}{2}Q$, k décrivant Λ ;
- l'identité hors de $\bigcup_{k\in\Lambda}(k + \frac{1}{2}Q)$.

On peut maintenant vérifier qu'en dehors de $\Sigma := \{t = 0\}$, a est C^1 par morceaux, les morceaux étant des polyèdres cylindriques à base triangulaire. Donc a y est conormal BV au sens de [7]. Mais Σ est de mesure $\mathcal{H}^d$ non nulle, mais cependant localement finie.

On définit le flot de a pour les temps positifs en raccordant les flots des champs $x \mapsto a(t, x) = b(2^j x)$ sur $t \in I_j$ et le flot trivial (du champs nul) sur $t > 1$. Comme a n'est pas autonome, on obtient ainsi une fonction $\Psi : \mathbb{R} \times D \to D$ avec $D := \{t > 0\} \times \mathbb{R}^2$.

Pour tout $(t,x) \in D$, l'application $s \mapsto (\tau(s), \xi(s)) := \Psi(s,(t,x))$ (définie pour $s > -t$) vérifie $\tau(s) = t + s$ et $\xi(s) = x + \int_0^s a(\tau(s'), \xi(s'))\, ds'$. D'une part $\|\xi\|_{\mathrm{Lip}} \leqslant \|a\|_{L^\infty}$ et on peut donc la prolonger à $s = -t$. D'autre part si ϕ est $C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)$ alors $s \mapsto \phi(\Psi(s,(t,x)))$ est Lipschitz et pour presque tout $s > -t$ sa dérivée vaut $(D_t\,\phi + a \cdot D_x\,\phi)(\Psi(s,(t,x)))$.

Pour tout $s > -t$, $\Psi(s,.)$ induit une bijection de $\{t\} \times \mathbb{R}^2$ dans $\{t+s\} \times \mathbb{R}^2$ qui préserve la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$: pour ϕ dans $L^1(\{t+s\} \times \mathbb{R}^2)$, on a l'égalité $\int_{\mathbb{R}^2} \phi(\Psi(s,(t,y))\, dy = \int_{\mathbb{R}^2} \phi(t+s,x)\, dx$.

La fonction u

On définit des fonctions $\mathbb{Z}^2$-périodiques $u_j \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ par $u_0(x) := \mathrm{sign}(x_1 x_2)$ sur Q et $u_j(x) := (-1)^j u_0(2^j x)$. On définit $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)$ par $u(t,x) = u_0(y)$ si $(t,x) = \Psi(s,(1,y))$ pour $t > 0$ et par $u(t,x) = 0$ pour $t < 0$.

Puisque le flot au temps $\frac{1}{2}$ de b transporte u_1 sur u_0, la construction assure que $u(2^{-j},x) = u_j(x)$. L'application $t \mapsto u(t,.)$ est continue sur $\mathbb{R}$ à valeur dans L^∞ faible-$*$. En effet sur $t > 0$ cela découle de la définition de u à l'aide de u_0 par Ψ et de la conservation de la mesure : l'application qui à t associe

$$\int_{\mathbb{R}^2} u(t,x)\phi(t,x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^2} u_0(y)\phi(\Psi(t-1,(1,y)))\, dy$$

est continue par convergence dominée si $\phi \in C_c(\mathbb{R}^2)$ est indépendante de t, et même, par densité, si $\phi \in L^1(\mathbb{R}^2)$. Par un raisonnement semblable, les u_j tendent vers 0 dans L^∞ faible-$*$ assurant la continuité en $t = 0$.

Justifions que u est solution faible de (T) sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ en testant contre une fonction $\phi \in C_c^1$: on veut calculer

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^2} -(D_t\,\phi + D_x\,\phi \cdot a) u\, dx\, dt.$$

L'intégrale sur $t < 0$ est nulle et compte tenu des bornes sur u, a, les dérivées et le support de ϕ, il suffit de calculer la limite, quand $\tau \to 0$ de l'intégrale (en t) sur $\{t > \tau\}$. Pour exploiter la définition de u et les propriétés de Ψ notons $(t, \xi(t,y)) = \Psi(t-1,(1,y))$. Alors l'intégrale à calculer vaut

$$\begin{aligned}\int_{t>\tau} \int_{\mathbb{R}^2} -(D_t\,\phi + a \cdot D_x\,\phi)(t,\xi(t,y)) u_0(y)\, dy\, dt &= \int_{\mathbb{R}^2} \Big(- \int_{t>\tau} D_t\big(\phi(t,\xi(t,y))\big)\, dt \Big) u_0(y)\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \phi(\tau,\xi(\tau,y)) u_0(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^2} \phi(\tau,x) u(\tau,x)\, dx.\end{aligned}$$

Cela tend vers 0 puisque u tend vers 0 dans L^∞ faible-$*$ et ϕ est continue en temps à valeurs dans $L^1(\mathbb{R}^2)$.

Conclusion

On a obtenu ici un exemple explicite qui contredit une conjecture trop naïve selon laquelle une borne essentielle sur les coefficients du champ et sur sa divergence impliqueraient l'unicité des solutions bornées de l'équation de transport. Mais l'exemple ne contredit cependant pas la conjecture plus raisonnable où l'on suppose en plus le champ BV. Notons, par rapport au théorème d'unicité de Colombini et Lerner [7] que notre champ est bien conormal BV en dehors de $t = 0$ qui est de mesure de Hausdorff (de codimension 1) localement finie, mais pas nulle.

Remarquer que u^2 vaut 0 sur $t < 0$ et 1 sur $t > 0$, donc $(D_t + a \cdot D_x)(u^2) = \delta_0(t)$.

Références

[1] M. Aizenman. On vector fields as generators of flows : a counterexample to Nelson's conjecture. *Ann. Math. (2)*, 107(2) :287–296, 1978.

[2] L. Ambrosio. Transport equation and Cauchy problem for BV vector fields. *Invent. Math.*, 158(2) :227–260, 2004.

[3] L. Ambrosio. Transport equation and Cauchy problem for BV vector fields and applications. In *Journées "Équations aux Dérivées Partielles"*, pages Exp. No. I, 11. École Polytech., Palaiseau, 2004.

[4] F. Bouchut. Renormalized solutions to the Vlasov equation with coefficients of bounded variation. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 157(1) :75–90, 2001.

[5] F. Colombini and N. Lerner. Sur les champs de vecteurs peu réguliers. In *Séminaire : Équations aux Dérivées Partielles, 2000–2001*, Sémin. Équ. Dériv. Partielles, pages Exp. No. XIV, 17. École Polytech., Palaiseau, 2001.

[6] F. Colombini and N. Lerner. Uniqueness of continuous solutions for BV vector fields. *Duke Math. J.*, 111(2) :357–384, 2002.

[7] F. Colombini and N. Lerner. Uniqueness of L^∞ solutions for a class of conormal BV vector fields. In *Geometric analysis of PDE and several complex variables*, volume 368 of *Contemp. Math.*, pages 133–156. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

[8] F. Colombini, T. Luo, and J. Rauch. Uniqueness and nonuniqueness for nonsmooth divergence free transport. In *Seminaire : Équations aux Dérivées Partielles, 2002–2003*, Sémin. Équ. Dériv. Partielles, pages Exp. No. XXII, 21. École Polytech., Palaiseau, 2003.

[9] F. Colombini, T. Luo, and J. Rauch. Nearly Lipschitzean divergence free transport propagates neither continuity nor BV regularity. *Commun. Math. Sci.*, 2(2) :207–212, 2004.

[10] F. Colombini and J. Rauch. Uniqueness in the Cauchy problem for transport in $\mathbb{R}^2$ and $\mathbb{R}^{1+2}$. *J. Differential Equations*, 211(1) :162–167, 2005.

[11] N. Depauw. Non unicité des solutions bornées pour un champ de vecteurs BV en dehors d'un hyperplan. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 337(4) :249–252, 2003.

[12] N. Depauw. Non-unicité du transport par un champ de vecteurs presque BV. In *Seminaire : Équations aux Dérivées Partielles, 2002–2003*, Sémin. Équ. Dériv. Partielles, pages Exp. No. XIX, 9. École Polytech., Palaiseau, 2003.

[13] R. J. DiPerna and P.-L. Lions. Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces. *Invent. Math.*, 98(3) :511–547, 1989.

[14] A. F. Filippov. Differential equations with discontinuous right-hand side. *Mat. Sb. (N.S.)*, 51 (93) :99–128, 1960.

[15] A. F. Filippov. Differential equations with discontinuous right-hand side. *American Mathematical Society Translations. Series 2*, 42 :199–231, 1960.

[16] L. Hörmander. *Lectures on nonlinear hyperbolic differential equations*, volume 26 of *Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications]*. Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[17] C. Le Bris and P.-L. Lions. Renormalized solutions of some transport equations with partially $W^{1,1}$ velocities and applications. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 183(1) :97–130, 2004.

[18] N. Lerner. Équations de transport dont les vitesses sont partiellement BV. In *Séminaire : Équations aux Dérivées Partielles. 2003–2004*, Sémin. Équ. Dériv. Partielles, pages Exp. No. X, 19. École Polytech., Palaiseau, 2004.

[19] N. Lerner. Transport equations with partially BV velocities. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)*, 3(4) :681–703, 2004.