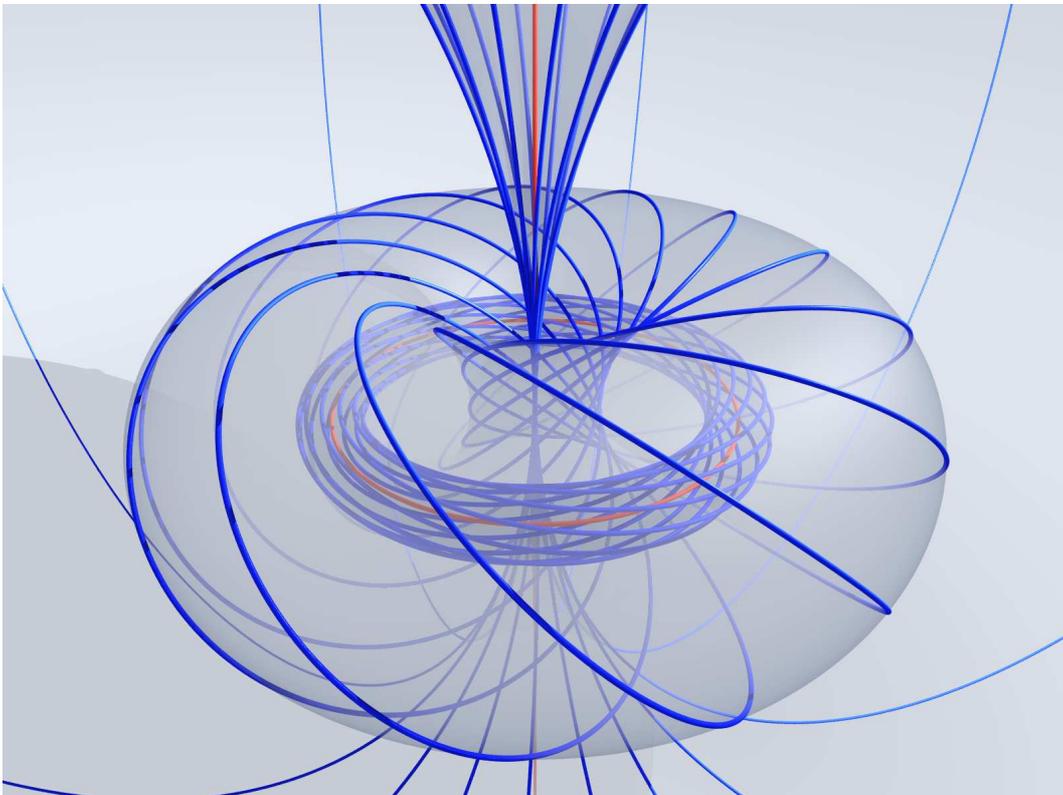

POINTS FIXES DES HOMÉOMORPHISMES DE SURFACES

par

Frédéric Le Roux

*Méthodes topologiques en dynamique des surfaces
École d'été, Grenoble, Juin 2006*



La fibration de Hopf. Dessin de Benoît Kloeckner, <http://www.umpa.ens-lyon.fr/~bkloeckn/>.

Table des matières

Introduction.....	3
1. Généralités sur les points fixes.....	4
a. Exemples.....	4
b. L'indice de Poincaré-Lefschetz.....	7
c. Un théorème d'extension.....	9
d. Remord : encore quelques exemples.....	12
e. Bilan provisoire.....	13
2. Un invariant, l'indice par quarts-de-tour.....	14
a. h -Longueur des courbes, module.....	14
b. Flèches horizontales.....	15
c. Flèches verticales.....	16
d. Lien avec l'indice de Poincaré-Lefschetz.....	18
e. Invariant global <i>vs</i> invariant local.....	18
3. Feuilletages du plan sans singularités.....	20
a. Définition, exemples.....	20
b. La théorie de Poincaré-Bendixson.....	22
c. Existence des composantes de Reeb.....	24
d. Dynamique des composantes de Reeb.....	28
e. Commentaires.....	30
4. Feuilletages du plan avec une singularité.....	32
a. L'indice par quarts-de-tour pour les feuilletages.....	32
b. Calcul de l'indice de Poincaré-Hopf.....	34
c. Application : dynamique locale des feuilletages en indice > 1	37
d. Composantes de Reeb des homéomorphismes.....	38
e. Section fantôme.....	39
5. Feuilletages en droites de Brouwer.....	40
a. Droites de Brouwer dans la sphère.....	40
b. Application du théorème feuilleté de Patrice Le Calvez.....	41
c. Conséquences.....	43
d. Relevé canonique.....	44
e. Idée de la preuve du théorème 5.2.....	45
Appendice	48
6. Théorèmes de Schoenflies-Homma.....	48
a. Le théorème de Schoenflies.....	48
b. Le théorème de Schoenflies-Homma.....	48
c. Utilisations.....	48
Références.....	49

Introduction

En 1970, Vladimir Arnol'd pose la question suivante ([**Arn**]) :

Soit f un difféomorphisme de la sphère S^2 , préservant l'aire, et préservant l'orientation. Est-il vrai qu'il admet au moins deux points fixes ?

Il indique la démarche à suivre : montrer qu'un point fixe d'un difféomorphisme conservatif de surface a un indice de Poincaré-Lefschetz ≤ 1 , et conclure en utilisant la formule de Lefschetz, qui dit que la somme des indices des points fixes doit être égale à la caractéristique d'Euler de la sphère, c'est-à-dire à 2. En 1974, Simon et Nikishin démontrent cette conjecture d'Arnol'd. Puis Pelikan et Slaminka, en 1987, étendent le résultat aux homéomorphismes ([**Sim74**, **Nik74**, **PS87**]). La démarche d'Arnol'd est emblématique de l'étude des points fixes des homéomorphismes de surface : on cherche à relier l'indice aux propriétés dynamiques (ici, la conservation de l'aire) ; on peut ensuite espérer récupérer des résultats de dynamique globale, par exemple l'existence de points fixes (ou d'orbites périodiques), souvent à l'aide de la formule de Lefschetz.

Pour revenir à la question d'Arnol'd, tous les ingrédients d'une preuve plus courte, et valable pour les homéomorphismes, étaient en fait disponibles bien avant qu'Arnol'd ne formule sa question, comme l'a remarqué Michel Herman : d'après Lefschetz, un homéomorphisme de la sphère préservant l'orientation doit avoir au moins un point fixe ; s'il n'en a qu'un, le *théorème des translations planes* de Brouwer dit que tous les autres points sont errants ; si l'aire est préservée, ceci contredit le théorème de récurrence de Poincaré.⁽¹⁾

Le raisonnement de Herman est très spécifique à la sphère : s'il court-circuite le résultat de Simon et Nikishin sur l'indice des points fixes des difféomorphismes conservatifs, il ne le rend pas caduque. Considérons une autre question d'Arnol'd :

Soit \vec{V} un champ de vecteurs C^1 de la sphère S^2 , de divergence nulle (le flot correspondant préserve le volume), et suffisamment proche du champ de Hopf.⁽²⁾ A-t-il au moins deux orbites périodiques ?

Dans cette situation, un résultat célèbre de Seifert dit que le champ a au moins une orbite périodique ([**Sei50**]) ; mais s'il n'en a qu'une seule, Seifert montre aussi que l'indice du point fixe de l'application de premier retour sur un petit disque transverse est égal à 2. Là encore, on peut appliquer le résultat de Simon et Nikishin pour conclure à l'existence d'une deuxième orbite périodique.⁽³⁾

Un des buts de ce texte est de raconter une preuve de la version topologique du résultat de Simon et Nikishin, en explicitant les propriétés dynamiques qui empêchent un homéomorphisme de surface avec un point fixe d'indice > 1 de préserver l'aire. Comme la preuve ne sera ni courte ni complète, on voit bien que ce but est surtout un prétexte pour parcourir un chemin que l'auteur espère agréable : on y rencontrera des exemples variés de dynamique locale et un indice en forme de flèches, on s'attardera à l'étude des feuilletages du plan et de leur composantes de Reeb, et on appliquera le théorème feuilleté de Patrice Le Calvez ([**LeC06**]) dans le cadre le plus simple qui soit.

⁽¹⁾Le résultat de Brouwer est décrit dans les notes du cours de Marc Bonino ([**Bon06**]).

⁽²⁾Voir le livre de Hatcher [**Hat**], exemple 4.45 pour la définition et un dessin de la fibration de Hopf.

⁽³⁾En réalité, la question d'Arnol'd est posée dans un cadre plus général ; même pour la fibration de Hopf, il demande si les deux orbites périodiques existent dès que \vec{V} forme un angle aigu avec le champ de Hopf. Je ne sais pas si la réponse est connue.

1. Généralités sur les points fixes

a. Exemples. — À quoi ressemble la dynamique d'un homéomorphisme de surface⁽⁴⁾ près d'un point fixe? Commençons par quelques exemples. On peut déjà dessiner la dynamique des applications linéaires du plan. On obtient ainsi des puits, des sources (homothéties contractantes ou dilatantes), des points selles avec ou sans rotation, comme $(x, y) \mapsto (2x, y/2)$ ou $(x, y) \mapsto (-2x, -y/2)$, et aussi des rotations.

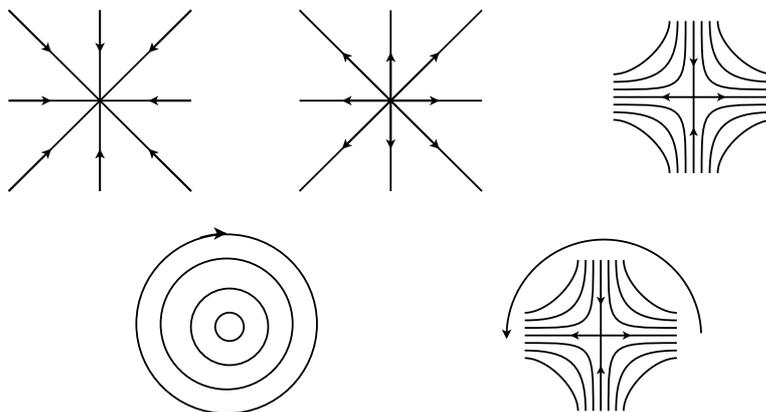


FIGURE 1. Les dynamiques linéaires du plan

La dynamique topologique s'intéresse aux propriétés qui sont conservées par la conjugaison par un homéomorphisme. De ce point de vue, on peut montrer qu'il n'y a pas d'autres dynamiques linéaires que celles que l'on vient de mentionner (si on se limite au cas préservant l'orientation, et que l'on exclut le cas où 1 est valeur propre, qui donnerait un point fixe non isolé).

Exercice 1.1. — Prouver que toute application linéaire de déterminant > 0 , dont 1 n'est pas valeur propre, est topologiquement conjuguée à l'une de celles qui sont dessinées ci-dessus.⁽⁵⁾

Le théorème d'Hartman-Grobman⁽⁶⁾ indique qu'on n'obtient rien de plus, localement, lorsqu'on considère un point fixe d'un difféomorphisme hyperbolique. Rappelons qu'une application linéaire est dite *hyperbolique* si elle n'a pas de valeur propre de module 1.

Théorème (Hartman-Grobman). — Soit f un difféomorphisme sur une surface différentiable S , et x_0 un point fixe de f . Si la différentielle de f en x_0 est une application linéaire hyperbolique, alors f est localement topologiquement linéarisable : il existe un homéomorphisme Φ , défini sur un voisinage de x_0 et à valeurs sur un voisinage de 0 dans l'espace tangent $T_{x_0}S$, tel que la relation

$$\Phi \circ f = D_{x_0}f \circ \Phi$$

⁽⁴⁾Dans tout le texte, *surface* est pris au sens d'*espace topologique séparable localement homéomorphe au plan et connexe*. On a parfois besoin d'une structure différentiable. On ne suppose pas de compacité.

⁽⁵⁾Bien sûr, on peut déjà simplifier le problème en utilisant la réduction linéaire. Lorsque l'application est diagonalisable sur \mathbb{R} , on est ramené à un problème en dimension 1, qu'on peut résoudre géométriquement ou analytiquement. Pour celles qui sont diagonalisables sur \mathbb{C} , il s'agit de montrer que les similitudes contractantes sont toutes conjuguées. C'est un peu plus difficile pour celles qui ne sont que trigonalisables.

⁽⁶⁾Voir par exemple [PD82].

a lieu partout où elle a un sens.

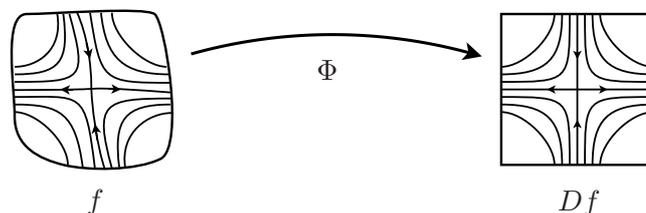


FIGURE 2. Le théorème d’Hartman-Grobman

Dans ce cours, nous laisserons de côté tout ce qui ressemble à une rotation (c’est l’objet du cours de Sylvain Crovisier, voir [Cro06]). Les puits et les sources ne sont pas très intéressants ; par contre, l’application selle $(x, y) \mapsto (2x, y/2)$ est l’un de nos exemples importants. Voici un autre exemple qui nous intéresse. On considère une translation du plan, par exemple $\tau : z \mapsto z + 1$. On peut compactifier le plan en une sphère en lui ajoutant le point à l’infini, et τ s’étend en un homéomorphisme $\hat{\tau}$ de la sphère qui fixe le point à l’infini. À quoi ressemble la dynamique de $\hat{\tau}$ au voisinage du point fixe à l’infini ?

Pour répondre à cette question, on peut réaliser plus concrètement l’homéomorphisme $\hat{\tau}$ en conjuguant la translation τ par la projection stéréographique. Celle-ci envoie les droites du plan sur des cercles passant par le pôle Nord (qui est notre infini) ; en particulier, la famille des droites horizontales, qui sont invariantes par τ , est transformée en une famille de cercles tangents, invariants par $\hat{\tau}$. On obtient alors le dessin de la figure 3.

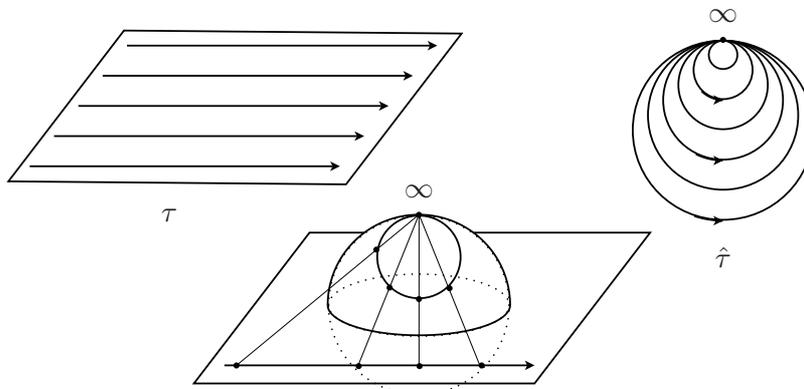


FIGURE 3. Dynamique d’une translation plane au voisinage du point fixe à l’infini

Si on considère le même problème d’un point de vue analytique, on peut ramener l’infini en 0 en regardant τ dans les coordonnées $w = 1/z$; l’application $z \mapsto z + 1$ devient alors

$$w \mapsto \frac{w}{w+1} = w - w^2 + \dots$$

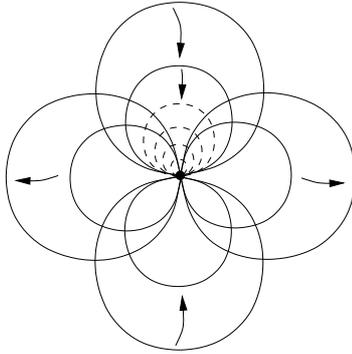
On peut alors appliquer un autre théorème de “linéarisation”, le théorème de la fleur de Leau-Fatou⁽⁷⁾ : la dynamique de τ en l’infini est celle de $w \mapsto w + w^2$ en 0.

⁽⁷⁾Voir par exemple [Mi190].

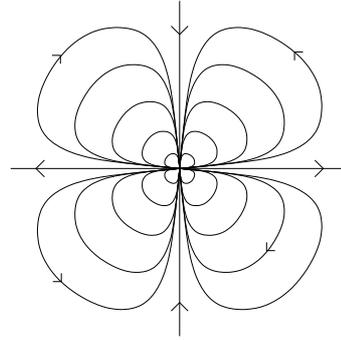
Théorème (Leau-Fatou). — Soit f une application holomorphe, définie sur un voisinage de 0 dans \mathbb{C} , qui fixe 0 et est tangente à l'identité en ce point fixe : son développement en 0 s'écrit

$$f(w) = w + \alpha w^{p+1} + \dots$$

avec $\alpha \neq 0$ (si f n'est pas l'identité). Alors f est localement topologiquement conjuguée à $w \mapsto w + w^{p+1}$.



Pétales



Feuilletage invariant

FIGURE 4. Dynamique de $w \mapsto w + w^3$ au voisinage de 0

Toutes les dynamiques lisses sont-elles linéarisables au sens des deux théorèmes précédents? Certainement pas! En voici deux illustrations :

- Soit f une application holomorphe définie au voisinage de 0 dans \mathbb{C} , fixant 0, dont la différentielle est une rotation :

$$f(z) = e^{2i\pi\theta}z + \dots$$

Ce cas extrêmement riche a été l'objet de recherches intenses ; les résultats sont liés aux propriétés arithmétiques de l'angle θ (présence de “petits diviseurs”). Si θ est un nombre “mal approché” par les rationnels (qui satisfait une certaine condition diophantienne), alors f est localement linéarisable, holomorphiquement conjugué à la rotation $z \mapsto e^{2i\pi\theta}z$. Mais si au contraire θ est trop bien approché par des rationnels, alors il existe des exemples non linéarisable⁽⁸⁾. Certains exemples ont des propriétés dynamiques vraiment différentes des rotations : le point fixe est accumulé par des orbites périodiques, et il existe des compacts connexes non localement connexes invariants par la dynamique dans tout voisinage de 0 (les “hérissos de Perez-Marco”).

- Soit f un C^∞ -difféomorphisme fixant 0, mais qui est infiniment tangent à l'identité, c'est-à-dire que $D_0f = \text{Id}$ et que les dérivées d'ordres supérieurs sont toutes nulles. Alors f ne rentre dans le cadre d'aucun théorème de linéarisation. Autrement dit, le caractère lisse, en l'absence d'hypothèse de non-dégénérescence du développement de Taylor, ne nous apprend presque rien sur la dynamique, et on peut tout aussi bien l'oublier, ce qui revient à traiter f comme un vulgaire homéomorphisme.

⁽⁸⁾Voir [Mil90] pour une preuve, complètement élémentaire, de ce fait.

L'absence de théorème définitif décrivant la dynamique locale des difféomorphismes laisse la place à une étude topologique fine. Cependant, comment peut-on espérer dire des choses sur les points fixes des homéomorphismes si la situation est déjà très compliquée pour certaines applications holomorphes ? Nous allons être aidés par un invariant simple mais très important, *l'indice de Poincaré-Lefschetz*, et par la théorie "miraculeuse" de Brouwer qui concerne les points fixes d'indice différents de 1.

b. L'indice de Poincaré-Lefschetz. — Soit h un homéomorphisme du plan fixant l'origine 0. Supposons que 0 est un point fixe *isolé* : il existe un disque D centré en 0 qui ne contient aucun autre point fixe de h . On peut alors définir *l'indice de Poincaré-Lefschetz* du point fixe 0 pour l'homéomorphisme h , de la manière suivante. En chaque point x du bord de D , on trace le vecteur \vec{v}_x qui va de x à $h(x)$. On évalue alors l'indice du champ de vecteurs \vec{v}_x le long du bord de D , c'est-à-dire le nombre algébrique de tours effectués par le vecteur \vec{v}_x lorsque x fait le tour du bord de D . On montre que ce nombre ne dépend pas du choix du disque D , et qu'il s'agit d'un invariant de conjugaison (voir l'appendice du cours de Marc Bonino [Bon06] sur l'indice de Lefschetz).

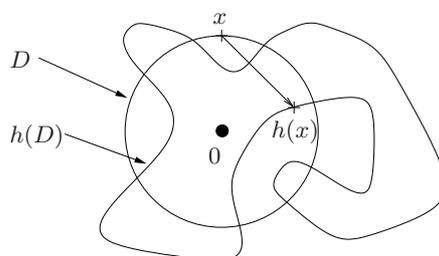


FIGURE 5. Définition de l'indice

Il est clair que l'indice est un invariant local : sa valeur ne dépend que du comportement de h sur un voisinage du point fixe. Cette remarque permet de généraliser la définition au cadre d'un homéomorphisme de surface ayant un point fixe isolé x_0 , en transportant la situation dans le plan (voir par exemple le théorème d'extension 1.10 ci-dessous).

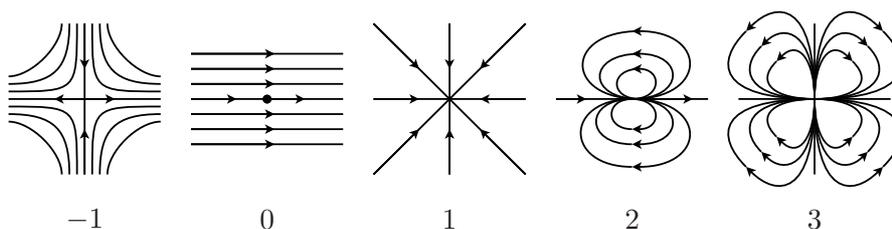


FIGURE 6. Différentes valeurs de l'indice

Les quarts-de-plan invariants pour l'application selle sont appelés *secteurs hyperboliques*. Les quarts-de-plan invariants pour le dessin de la figure 4 sont appelés *secteurs elliptiques*. On appelle *dynamique modèle* tout homéomorphisme obtenu en recollant des secteurs elliptiques et hyperboliques, comme sur les dessins de la figure 7.

Un des buts de ce texte est de convaincre le lecteur que l'affirmation vague suivante n'est pas complètement fausse.

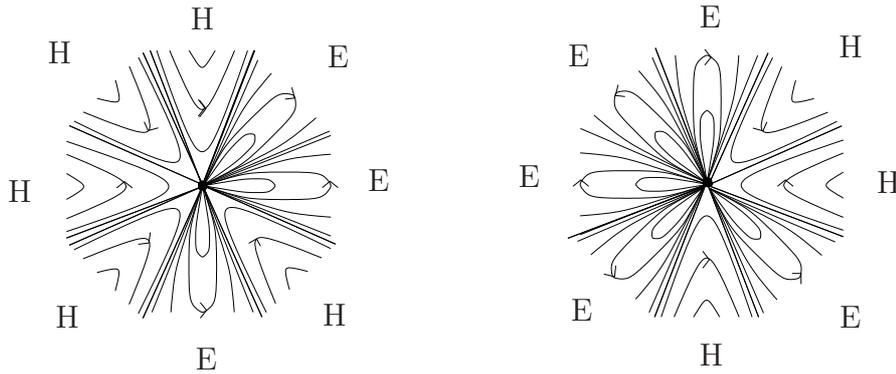


FIGURE 7. Deux exemples de “dynamiques modèles” duales : on passe de l’une à l’autre en échangeant les rôles de 0 et de l’infini, ce qui échange les secteurs hyperboliques et elliptiques.

Affirmation vague 1.2. — La dynamique locale d’un homéomorphisme de surface, préservant l’orientation, au voisinage d’un point fixe d’indice différent de 1 ressemble à celle des dynamiques modèles.

Absence de récurrence. — Le premier résultat allant dans le sens de l’affirmation vague est fourni par la théorie de Brouwer.

Théorème 1.3 (absence de récurrence). — Soit h un homéomorphisme du plan, préservant l’orientation, fixant uniquement 0, tel que l’indice du point fixe est différent de 1.

Alors tous les points x autres que 0 sont errants. En particulier, l’orbite future de x , $(h^n(x))_{n \geq 0}$ tend vers 0 ou l’infini.

Bien sûr, on a le même résultat pour l’orbite passée. Rappelons qu’un point est *errant* si il possède un voisinage U qui est disjoint de tous ses itérés $h^n(U)$. “Tendre vers l’infini” signifie converger vers le point fixe à l’infini du compactifié d’Alexandrov (autrement dit, la suite sort de tout compact du plan).

Preuve du théorème. — Le fait que les points errent est contenu dans le cours de Marc Bonino (corollaire 1.6 de [Bon06]). Nous expliquons ici comment en déduire que l’orbite future de tout point x tend vers 0 ou l’infini.

Notons $\omega(x)$ l’ensemble ω -limite de x , c’est-à-dire l’ensemble des points d’accumulation de son orbite future. On montre facilement qu’un point de l’ensemble ω -limite ne peut pas être errant. Par conséquent, on a $\omega(x) \subset \{0, \infty\}$, et il s’agit juste de voir que l’orbite ne peut pas accumuler à la fois 0 et l’infini. Soient U_0, U_∞ deux petits voisinages ouverts des points 0, ∞ . Par continuité de h , on peut les choisir assez petits pour qu’aucun point ne puisse passer directement de l’un à l’autre : autrement dit, on a

$$h(U_0) \cap U_\infty = \emptyset \quad \text{et} \quad h(U_\infty) \cap U_0 = \emptyset.$$

Considérons alors le compact $K = \mathbb{R}^2 \setminus (U_0 \cup U_\infty)$. Puisque l’ensemble ω -limite de x ne rencontre pas K , il existe un temps $n_0 > 0$ tel que l’orbite $(h^n(x))_{n \geq n_0}$ soit hors de K . Supposons par exemple que $h^{n_0}(x)$ soit dans U_0 ; puisqu’on ne peut pas passer

directement de U_0 à U_∞ sans passer par K , toute l'orbite $(h^n(x))_{n \geq n_0}$ est incluse dans U_0 , et par conséquent l'orbite future de x n'accumule pas le point à l'infini. \square

La formule de Lefschetz. — Soit S une surface compacte, et h un homéomorphisme de S isotope à l'identité. Supposons que f n'a qu'un nombre fini de points fixes. Alors la *formule de Lefschetz* dit que la somme des indices de ces points fixes est égale à la caractéristique d'Euler-Poincaré de la surface S . En particulier, tous nos exemples précédents peuvent être vus comme des homéomorphismes de la sphère $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ fixant uniquement les points 0 et l'infini, et la formule dit que la somme des deux indices vaut 2. Notons que cette formule existe dans un cadre beaucoup plus général (voir par exemple le livre de Hatcher, [Hat]).

L'exercice suivant nous sera utile.

Exercice 1.4 (Indice des attracteurs). — Soit h un homéomorphisme du plan fixant uniquement 0. Supposons qu'il existe un disque D centré en 0 tel que $h(D) \subset \text{Int}(D)$. Montrer que dans ce cas, l'indice du point fixe vaut 1. Aide : on pourra utiliser le théorème de Schoenflies (Appendice, théorème 6.1).

Exercice 1.5. — Que vaut l'indice pour les dynamiques linéaires, et pour le point fixe à l'infini de la translation ? Quel est l'indice de 0 pour l'application $w \mapsto w + w^{p+1}$ ($p \geq 1$) ? En s'inspirant de l'application selle $(2x, y/2)$, dessiner un homéomorphisme pour lequel l'indice de 0 est -2 .

Exercice 1.6. — Montrer soigneusement qu'on peut recoller les secteurs modèles pour obtenir un homéomorphisme : par exemple construire formellement la dynamique modèle avec un secteur hyperbolique et un secteur elliptique.

Exercice 1.7. — Donner une formule pour l'indice d'une dynamique modèle.

Exercice 1.8. — Montrer que l'énoncé du théorème 1.3 est faux en indice 1.

Exercice 1.9. — Faire un dessin de la dynamique de l'application selle $(2x, y/2)$ sur la sphère $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$. Vérifier la formule de Lefschetz sur ce dessin. Même exercice pour les autres exemples.

c. Un théorème d'extension. — Lorsqu'on veut étudier la dynamique d'un homéomorphisme de surface au voisinage d'un point fixe, il peut être pratique de se débarrasser à la fois de la topologie de la surface et des autres points fixes, c'est-à-dire de se ramener au cas d'un homéomorphisme du plan fixant uniquement l'origine.

On se donne un homéomorphisme h d'une surface S , et un point fixe isolé x_0 (sans hypothèse d'indice, ni d'orientation, ni de compacité de S).

Théorème 1.10 (voir Hamilton, [Ham54]). — *Il existe un homéomorphisme du plan h_0 , qui fixe uniquement 0, et qui est localement conjugué, au voisinage de 0, à h au voisinage de x_0 : il existe un voisinage U de 0 et un homéomorphisme $\Phi : U \rightarrow \Phi(U) \subset S$ qui envoie 0 sur x_0 , et tel que la relation*

$$h \circ \Phi = \Phi \circ h_0$$

a lieu partout où elle a un sens.

Nous allons expliquer une construction qui marche presque toujours : elle échoue seulement lorsque S est la sphère et h est un homéomorphisme qui fixe uniquement x_0 (autrement dit pour les *homéomorphismes de Brouwer*, voir [Bon06]). Cependant, dans ce cas, on peut toujours commencer par modifier h loin de x_0 pour créer de nouveaux points fixes, et se ramener ainsi au cas général. Lorsqu'on exclut ce cas particulier, on peut décrire un procédé *canonique* : il n'y a aucun choix dans la construction, et on pourrait caractériser complètement l'homéomorphisme h_0 à partir de h et x_0 . L'idée consiste à utiliser un revêtement p de $S \setminus \text{Fixe}(h)$ par l'anneau infini $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, qui s'étend en envoyant 0 sur x_0 . On donne ici une construction directe, inspirée de la construction des revêtements comme espaces de courbes modulo homotopie.

Démonstration. — Notons 0 la courbe constante $t \in [0, 1] \mapsto x_0$. On considère l'ensemble E contenant la courbe 0 et toutes les courbes (continues) $\gamma : [0, 1] \rightarrow S$ telles que

1. $\gamma(0) = x_0$;
2. $\gamma(]0, 1]) \cap \text{Fixe}(h) = \emptyset$.

Cet ensemble est muni de la topologie de la convergence uniforme. On considère la relation d'homotopie à extrémités fixées : autrement dit, $\gamma_0 \sim \gamma_1$ si il existe un chemin continu $(\gamma_s)_{s \in [0, 1]}$ dans E , allant de γ_0 à γ_1 tel que $\gamma_s(1) = \gamma_0(1)$ pour tout s . On note E / \sim l'espace quotient, et on définit l'application⁽⁹⁾

$$\begin{aligned} \Phi : E / \sim &\longrightarrow S \\ \gamma &\longmapsto \gamma(1). \end{aligned}$$

Affirmation 1.11. — *L'application Φ est un homéomorphisme local, et l'espace E / \sim est homéomorphe au plan.*

L'homéomorphisme h agit naturellement sur E par $\gamma \mapsto h \circ \gamma$. Cette application passe au quotient, elle induit un homéomorphisme de l'espace E / \sim que l'on note h_0 . Cet homéomorphisme fixe la courbe 0, et n'a aucun autre point fixe. La conjugaison locale entre h_0 et h est donnée par l'application Φ restreinte à un voisinage U suffisamment petit de 0.⁽¹⁰⁾ \square

Preuve de l'affirmation. — Les arguments sont les mêmes que dans la construction du revêtement universel (voir par exemple [Hat], section 1.3), les détails sont laissés au lecteur. Montrons par exemple que Φ est un homéomorphisme local au voisinage de 0. Soit D un disque dans S , centré en x_0 , et ne contenant aucun autre point fixe. Pour tout point x de D , soit γ_x le segment allant de x_0 à x (on a identifié D au disque unité du plan). L'application $s : x \mapsto \gamma_x$, vu comme allant de D dans E / \sim , est une section locale de Φ , et $s(D)$ est un voisinage de 0 dans E / \sim qui est donc homéomorphe au disque D .

Par le même type d'argument, on montre que Φ est un homéomorphisme au voisinage de tout point de E / \sim , et notamment que E / \sim est une surface. On peut ensuite montrer (comme pour le revêtement universel) que le groupe fondamental de E / \sim est trivial.

⁽⁹⁾La seule différence avec la construction du revêtement universel de la surface $S \setminus \text{Fixe}(h)$ tient au fait que le point base est choisi en dehors de cette surface. Attention, l'application Φ est un revêtement seulement en restriction à $E / \sim \setminus \{0\}$ (le point x_0 n'a pas de voisinage trivialisant pour Φ).

⁽¹⁰⁾Par exemple, avec les notations de la preuve de l'affirmation ci-dessous, on peut choisir pour U l'ensemble des courbes γ_x telles que $h(\gamma_x) \subset D$.

D'après la classification des surfaces, cet espace est alors homéomorphe à la sphère ou bien au plan.

Il nous reste donc à exclure le cas où E/\sim est une sphère. Raisonnons par l'absurde, en supposant que nous sommes dans ce cas. Puisque Φ est continue et surjective sur $S' = (S \setminus \text{Fixe}(h)) \cup \{x_0\}$, cet ensemble doit être compact : autrement dit, S est une surface compacte et x_0 est le seul point fixe de h . Dans ce cas, par hypothèse S ne peut pas être la sphère (c'est le cas particulier que nous avons exclu, voir le commentaire avant la preuve). Alors la classification des surfaces compactes nous dit que le groupe fondamental de S doit être non trivial. Mais dans ce cas on montre que E/\sim n'est pas compact, ce qui donne la contradiction : si on considère un lacet γ basé en x_0 et non trivial dans S , la suite $(\gamma|_{[0,1-1/n]})$, vue comme suite de points de E/\sim , n'admet pas de sous-suite convergente. \square

Ce théorème permet en particulier d'obtenir des versions locales de résultats de dynamique globale. Voici par exemple la version locale de l'absence de récurrence en indice différent de 1.

Corollaire 1.12 (absence de récurrence, version locale)

Soit h un homéomorphisme de surface, x_0 un point fixe isolé de h , on suppose que h préserve l'orientation au voisinage de x_0 . Si l'indice de ce point fixe est différent de 1, alors il existe un voisinage U de x_0 ayant la propriété suivante. Pour tout point x de U , si la suite $(h^n(x))_{n \geq 0}$ est entièrement incluse dans U , alors cette suite tend vers x_0 .

Autrement dit, sous l'itération de h , un point ne peut que s'éloigner du point fixe ou tendre vers le point fixe.

La figure 8 donne une idée du revêtement p qui apparaît dans la construction du théorème 1.10, dans le cas le plus simple, celui de la sphère avec trois points fixes. Dans ce cas, la surface ouverte $S \setminus \text{Fixe}(h)$ a le type d'homotopie d'un bouquet de deux cercles. Le dessin représente un revêtement de ce bouquet de deux cercles ; en l'épaississant, on obtient un anneau topologique qui revêt $S \setminus \text{Fixe}(h)$. Le point fixe 0 est rajouté à l'intérieur de la boucle de l'anneau.

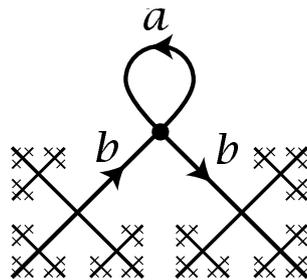


FIGURE 8. Un revêtement du bouquet de deux cercles (reproduit sans permission de [Hat])

Exercice 1.13. — Soit h un homéomorphisme défini sur un voisinage U de 0 dans le plan, et tel que $h(U) = V$ comme sur la figure 9. Montrer que tout homéomorphisme H du plan qui étend h admet au moins un point fixe autre que 0. Y a-t-il une contradiction avec le théorème d'extension ?

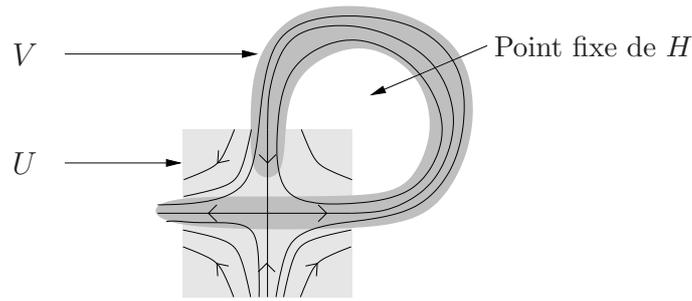


FIGURE 9. Extension sans point fixe?...

d. Remord : encore quelques exemples. — J'ai affirmé, sans que cette affirmation ait été beaucoup étayée jusqu'à présent, que la dynamique en indice différent de 1 ressemble à ce qu'on obtient en recollant des secteurs elliptiques et hyperboliques. Avant de continuer, il vaut mieux avoir en tête quelques exemples qui montrent les limites d'une telle affirmation.

Secteurs hyperboliques et elliptiques enrichis. — On peut d'abord enrichir des secteurs hyperboliques ou elliptiques. Cependant, même si on peut construire comme ceci une infinité d'exemples, ils sont encore très proches des dynamiques modèles (on retrouve un secteur-modèle en écrasant les bulles).

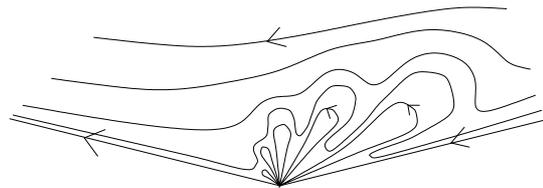


FIGURE 10. Enrichissement d'un secteur hyperbolique

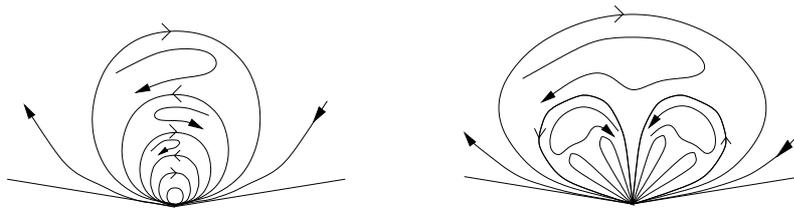


FIGURE 11. Enrichissement de secteurs elliptiques

Un exemple de secteur plus étrange. — Voici un exemple vraiment différent, qui a été construit par M. Brown, E. Slaminka et W. Transue ([BST88]). On commence par définir une dynamique g sur la bande $[-1, 1] \times \mathbb{R}$, en composant deux homéomorphismes φ et ψ (figure 12). Pour cela, on considère l'ensemble F constitué des deux droites bordant la bande, $\{-1\} \times \mathbb{R}$ et $\{1\} \times \mathbb{R}$, ainsi que des points d'abscisse 0 et d'ordonnée entière. L'homéomorphisme φ translate le point (θ, r) verticalement d'une hauteur $2|\theta| - 1$ (on a donc $\varphi(F) = F$, φ pousse les points du bord vers le haut et ceux d'abscisse 0 vers le bas). L'homéomorphisme ψ translate le point (θ, r) horizontalement, vers la droite,

d'une distance égale à la moitié de la distance euclidienne de (θ, r) à l'ensemble F (il fixe donc chaque point de l'ensemble F). La dynamique correspondante est représentée sur la figure 12. Notez que certaines orbites "se croisent", ce qui n'arrivait pas dans les exemples précédents (l'orbite de F qui descend croise presque toutes les orbites de l'intérieur de la bande, comme celle représentée en pointillés). On peut ensuite identifier un secteur du plan

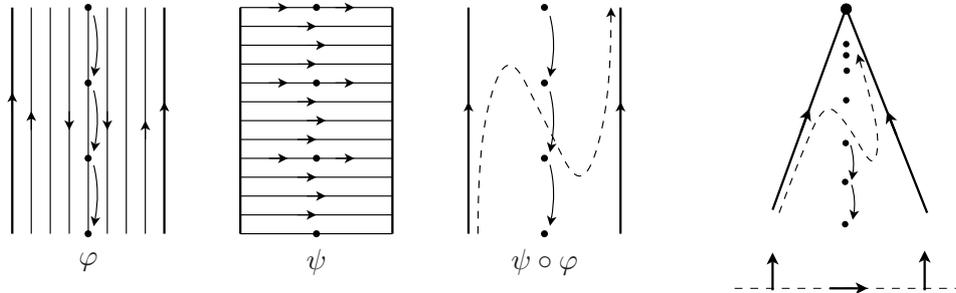


FIGURE 12. Modèle indifférent

à la bande $[-1, 1] \times \mathbb{R}$ par les coordonnées polaires (par exemple $(\theta, r) \mapsto \exp(-r + i\pi\theta/4)$, ce qui revient à ajouter à la bande le point à l'infini en haut), et transporter ainsi la dynamique g sur un secteur du plan. Ce type de secteur s'appelle *secteur indifférent*. Nous enrichissons notre stock de "dynamiques modèles" en autorisant tous les exemples obtenus en recollant des secteurs hyperboliques, elliptiques ou indifférents. On obtient ainsi une version plus raisonnable de notre "affirmation vague" 1.2. La première version, sans les secteurs indifférents, sera plutôt valable pour les feuilletages (voir les sections 3 et 4).

e. Bilan provisoire. — De cette section, retenons trois choses. D'abord l'absence de récurrence au voisinage d'un point d'indice différent de 1, ce qui conduit à séparer l'étude des points d'indice 1 et celle des points d'indice différent de 1. Ensuite, le résultat d'extension qui permet de ramener l'étude de la dynamique autour d'un point fixe isolé à celle d'un homéomorphisme du plan ayant un unique point fixe. Enfin, le point de vue qui consiste à se donner des dynamiques modèles, et à se demander en quoi les homéomorphismes généraux ressemblent à nos modèles.

2. Un invariant, l'indice par quarts-de-tour

Dans toute cette section, nous considérons un homéomorphisme h du plan, préservant l'orientation, ayant pour seul point fixe l'origine 0. Nous nous plaçons dans le cas où l'indice du point fixe est différent de 1. Nous décrivons un invariant de conjugaison qui affine l'indice de Poincaré-Lefschetz ([LeR05, LeR∞]). En un certain sens, cet invariant associe à chaque h la dynamique modèle "à laquelle il ressemble le plus" (voir la fin de la section précédente). Pour définir cet invariant, nous allons commencer par définir une façon de mesurer la longueur des courbes qui entourent le point fixe en tenant compte de la dynamique de h . L'invariant sera alors relié au comportement de h vis-à-vis des courbes qui minimisent cette longueur dynamique.

a. h -Longueur des courbes, module. —

Courbes. — Une *courbe* est une application continue de $[0, 1]$ dans \mathbb{R}^2 . Une courbe γ est *fermée* si $\gamma(1) = \gamma(0)$. On pourra voir une courbe fermée comme une application continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^2 , obtenue en prolongeant γ par périodicité, ou bien comme une application du cercle \mathbb{R}/\mathbb{Z} dans \mathbb{R}^2 . Une courbe est un *arc simple* si elle est injective (autrement dit, sans point double). Une courbe fermée est *simple* si le seul point double est $\gamma(0) = \gamma(1)$; on dira aussi que c'est une *courbe de Jordan*. Pour tous $t_1 < t_2$ dans $[0, 1]$, on notera $[t_1 t_2]_\gamma$ (ou $[\gamma(t_1)\gamma(t_2)]_\gamma$) la sous-courbe de γ obtenue en restreignant γ à l'intervalle $[t_1 t_2]$ (et en reparamétrisant pour obtenir une application définie sur $[0, 1]$). Si γ est une courbe fermée, on la voit comme une application 1-périodique de \mathbb{R} , et ceci a encore un sens si $t_1 < t_2$ sont deux réels quelconque. On confondra souvent une courbe et son image dans le plan.

On considère maintenant une courbe de Jordan γ qui entoure le point fixe 0 dans le sens positif (autrement dit, γ est homotope dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ à l'application $\theta \mapsto \exp(2i\pi\theta)$). On dit qu'un ensemble E est *libre pour l'homéomorphisme h* si $h(E)$ est disjoint de E .

Définition 2.1. — Une *décomposition* de γ est la donnée de réels $t_1 < t_2 < \dots < t_\ell < t_{\ell+1} = t_1 + 1$ tels que chacune des sous-courbes $\gamma_i = [t_i t_{i+1}]_\gamma$, $i = 1, \dots, \ell$ soit libre pour h . De manière équivalente, on pourra se donner une décomposition en écrivant γ comme la concaténation des sous-courbes γ_i , $\gamma = \gamma_1 * \dots * \gamma_\ell$. L'entier ℓ est appelé *longueur* de la décomposition. Les points $\gamma(t_i)$ en sont les *sommets*.

Définition 2.2. — La *h -longueur* de γ est le minimum des longueurs des décompositions de γ . Une décomposition réalisant ce minimum est appelée décomposition *minimale*.

Nous pouvons maintenant définir un invariant simple, le module.

Définition 2.3. — Le *module* de h est le minimum des h -longueurs des courbes de Jordan γ entourant 0. Toute courbe γ réalisant ce minimum est appelée *courbe de Jordan géodésique*.

Lorsque le module vaut 1, la courbe est disjointe de son image, et dans ce cas le point fixe est d'indice 1 (voir l'exercice 1.4). Sous nos hypothèses le module est donc un entier ≥ 2 .

Exercice 2.4. — Évaluer le module pour tous les exemples dessinés précédemment, notamment pour les dynamiques modèles.

b. Flèches horizontales. — Nous allons avoir besoin d’une version simple du lemme de Franks que nous rappelons maintenant. La preuve est contenue dans les notes de Marc Bonino (voir [Bon06]). Ce lemme utilise de manière essentielle l’hypothèse “indice différent de 1”.

Lemme 2.5 (Franks). — *Il n’existe pas de paire de disques topologiques fermés⁽¹¹⁾ libres D_1, D_2 , d’intérieurs disjoints, tels que*

$$h^{n_1}(\text{Int}(D_1)) \cap \text{Int}(D_2) \neq \emptyset \text{ et } h^{n_2}(\text{Int}(D_2)) \cap \text{Int}(D_1) \neq \emptyset$$

où n_1 et n_2 sont deux entiers strictement positifs.

Fixons maintenant une courbe de Jordan géodésique γ , munie d’une décomposition minimale

$$\gamma = \gamma_1 * \cdots * \gamma_d = [x_1 x_2]_\gamma * \cdots * [x_d x_1]_\gamma$$

où d est le module de h . Considérons deux sous-arcs adjacents γ_{i-1} et γ_i (où $i-1, i$ sont considérés modulo d). Par minimalité de l’entier d , l’arc $\gamma_{i-1} * \gamma_i$ n’est pas libre. Puisque chacun des arcs γ_{i-1} et γ_i sont libres, on a nécessairement $h(\gamma_{i-1}) \cap \gamma_i \neq \emptyset$ ou $h(\gamma_i) \cap \gamma_{i-1} \neq \emptyset$. Montrons que ces deux possibilités ne peuvent pas survenir simultanément.

Affirmation 2.6. — *De deux choses l’une : ou bien $h(\gamma_{i-1}) \cap \gamma_i \neq \emptyset$, ou bien $\gamma_{i-1} \cap h(\gamma_i) \neq \emptyset$.*

Démonstration. — On note x_i le sommet commun aux deux arcs. En utilisant le théorème de Schoenflies (Appendice, théorème 6.1), on peut supposer que γ est un segment euclidien (ou bien un cercle si $d = 2$) : voir la figure 13. On peut alors épaissir les deux arcs pour trouver deux disques topologiques fermés D_1, D_2 tels que

- $\gamma_{i-1} \setminus \{x_i\} \subset \text{Int}(D_1)$ et $\gamma_i \setminus \{x_i\} \subset \text{Int}(D_2)$;
- les intérieurs de D_1 et D_2 sont disjoints ;
- D_1 et D_2 sont libres.

Supposons maintenant que la première possibilité de l’affirmation est vérifiée, c’est-à-dire qu’il existe un point x de γ_{i-1} dont l’image $h(x)$ est dans γ_i . Alors $x \neq x_i$ car γ_i est libre, et $h(x) \neq x_i$ car γ_{i-1} est libre. Par conséquent x et $h(x)$ appartiennent respectivement aux intérieurs de D_1 et D_2 , autrement dit $h(\text{Int}(D_1))$ rencontre $\text{Int}(D_2)$. De même, si la seconde possibilité de l’affirmation est vérifiée, alors $h(\text{Int}(D_2))$ rencontre $\text{Int}(D_1)$. Le lemme de Franks 2.5 interdit donc que les deux rencontres aient lieu simultanément. \square

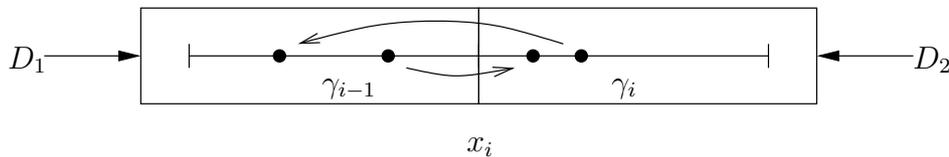


FIGURE 13. Définition d’une flèche, *via* le lemme de Franks

⁽¹¹⁾Un disque topologique fermé est un ensemble homéomorphe au disque unité fermé du plan.

Définition 2.7. — Cette affirmation permet d’associer à chaque sommet x_i de notre décomposition de courbe géodésique un “bit d’information”, sous forme d’une flèche qui traduit le sens de la dynamique :

- $m(x_i) = \rightarrow \iff h(\gamma_{i-1}) \cap \gamma_i \neq \emptyset$,
- $m(x_i) = \leftarrow \iff \gamma_{i-1} \cap h(\gamma_i) \neq \emptyset$.

c. Flèches verticales. — Nous venons d’associer d bits d’information à la courbe géodésique γ . Nous expliquons maintenant comment compléter cette information par d autres bits pour obtenir l’indice par quarts-de-tour. Commençons par dire quel genre d’objet va être cet indice. L’indice par quarts-de-tour est un mot cyclique sur l’alphabet $\{\rightarrow, \leftarrow, \downarrow, \uparrow\}$, de longueur $2d$ (autrement dit une application de $\mathbb{Z}/2d\mathbb{Z}$ dans l’ensemble $\{\rightarrow, \leftarrow, \downarrow, \uparrow\}$). De plus, les flèches horizontales et verticales alternent. Un tel mot sera appelé *mot autorisé*. Nous avons déjà défini les flèches horizontales, il reste à expliquer comment intercaler une flèche verticale entre deux flèches horizontales successives. Chaque flèche verticale sera naturellement associée à un arc γ_i , et l’ensemble des flèches verticales décrira la dynamique des sommets x_i de la décomposition.

Nous avons vu que l’orbite future de tout point converge vers 0 ou vers le point à l’infini (absence de récurrence, théorème 1.3). Pour décrire le comportement des orbites passées et futures de chaque sommet x_i , il nous faut donc *a priori* encore $2d$ bits d’information. En fait, une fois que les flèches horizontales sont déterminées, les comportements de deux sommets adjacents sont liés, ce qui explique que d bits supplémentaires vont suffire.

Par exemple, supposons que $(m(x_i), m(x_{i+1})) = (\rightarrow, \leftarrow)$. Alors les points x_i et x_{i+1} ont le même comportement futur⁽¹²⁾, que l’on va décrire par la flèche \uparrow si les deux orbites futures tendent vers 0, et par \downarrow si elles tendent vers l’infini. Au final, on lira la dynamique passée et future du point x_i au moyen des trois lettres successives $m(\gamma_{i-1}), m(x_i), m(\gamma_i)$, à l’aide du tableau de la figure 14. Tout ceci est précisé dans l’énoncé suivant.

Théorème 2.8. — Soit h un homéomorphisme du plan, préservant l’orientation, fixant uniquement 0, tel que l’indice du point fixe est différent de 1. Considérons une décomposition minimale d’une courbe de Jordan géodésique,

$$\gamma = \gamma_1 * \cdots * \gamma_d = [x_1 x_2]_\gamma * \cdots * [x_d x_1]_\gamma.$$

Il existe alors un mot autorisé $M(\gamma) = m_1 \cdots m_{2d}$ avec les propriétés suivantes. Pour tout entier i :

1. la lettre m_{2i} est caractérisée par :
 - $m_{2i} = \rightarrow \iff h(\gamma_{i-1}) \cap \gamma_i \neq \emptyset$,
 - $m_{2i} = \leftarrow \iff \gamma_{i-1} \cap h(\gamma_i) \neq \emptyset$;
2. le comportement de l’orbite totale $(h^n(x_i))_{n \in \mathbb{Z}}$ est fonction du mot $m_{2i-1} m_{2i} m_{2i+1}$ comme indiqué sur le tableau de la figure 14.

Enfin, le résultat principal dit que le mot obtenu est un invariant de conjugaison.

Théorème 2.9. — Le mot cyclique $M(\gamma)$ ne dépend pas du choix de la courbe de Jordan géodésique γ , ni de sa décomposition (à permutation circulaire des lettres près).

⁽¹²⁾En fait, dans ce cas, on peut montrer que tous les itérés positifs de l’arc $[x_i x_{i+1}]_\gamma$ sont disjoints de la courbe γ .

m_{2i-1}	m_{2i}	m_{2i+1}	$\alpha(x_i)$	$\omega(x_i)$	dessin
	↓→↓		0	∞	
	↓←↓		0	∞	
	↑→↑		∞	0	
	↑←↑		∞	0	
	↓→↑		0	0	
	↑→↓		∞	∞	
	↑←↓		0	0	
	↓←↑		∞	∞	

FIGURE 14. Correspondance entre les flèches et la dynamique des sommets. $\alpha(x)$ désigne la limite de la suite $(h^n(x))_{n \leq 0}$ et $\omega(x)$ celle de la suite $(h^n(x))_{n \geq 0}$. Le dessin est obtenu en interpolant les trois flèches ; il donne un moyen mnémotéchnique de retrouver $\alpha(x_i)$ et $\omega(x_i)$, en convenant que 0 se situe “en haut” et l’infini “en bas”.

Définition 2.10. — On appelle *indice par quarts-de-tour* de h , et on note $M(h)$, le mot cyclique fourni par le théorème précédent.

Pour comprendre la correspondance entre les lettres du mot et la dynamique des sommets (et le choix des flèches comme symboles), il faut imaginer qu’on écrit le mot cyclique $M(h)$ le long d’un cercle entourant le point fixe 0 (par convention, le scribe se tient à l’extérieur du cercle et écrit le mot en restant tourné vers le point fixe, en faisant le tour du cercle dans le sens trigonométrique, et en commençant par la flèche du bas). Chaque mot de trois lettres qui apparaît dans $M(h)$, et qui commence par une flèche verticale, indique la dynamique du sommet correspondant dans une courbe de Jordan géodésique, comme illustré sur la figure suivante.

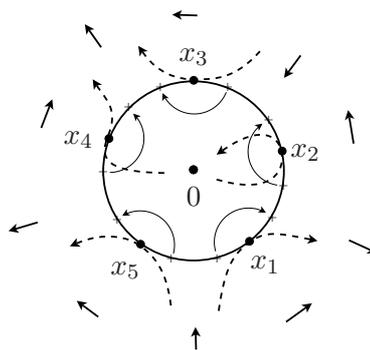


FIGURE 15. Mot et courbe géodésique

Remarquons que cet invariant se généralise à (presque) n’importe quel point fixe isolé x_0 , d’indice différent de 1 d’un homéomorphisme h d’une surface S qui préserve l’orientation

(au voisinage de x_0). En effet, le théorème d'extension 1.10 permet de passer de ce cadre général au cadre de cette section, *par un procédé qui est canonique*. Le cas qui ne marche pas est celui où le procédé canonique échoue, c'est-à-dire celui de la sphère avec un unique point fixe.

L'exercice suivant fait le lien entre l'invariant et nos "modèles".

Exercice 2.11. — Évaluer l'indice par quarts-de-tour pour l'application selle $(2x, y/2)$, puis pour les dynamiques modèles dessinées sur la figure 7. Vérifier que l'ensemble des mots autorisés est en bijection avec l'ensemble des dynamiques modèles : pour les dynamiques modèles, l'indice par quarts-de-tour donne une description combinatoire des différents types de secteurs.

Pour aller plus loin dans la confortation de l'"affirmation vague" 1.2, il resterait à montrer en quoi la dynamique de h ressemble à celle du modèle donné par $M(h)$. Faute de place, nous ne donnons pas de résultat précis dans ce sens. Disons simplement qu'on peut, par exemple, définir la notion de "composantes de Reeb" qui généralise la présence de bords des secteurs dans les dynamiques modèles. Dans la partie suivante, nous étudierons ces composantes de Reeb dans un cas simple, celui des feuilletages.

d. Lien avec l'indice de Poincaré-Lefschetz. — On peut retrouver l'indice de Poincaré-Lefschetz à partir de l'indice par quarts-de-tour, et c'est ce lien qui explique le nom de cet invariant. Pour expliquer ceci de manière informelle, nous reprenons notre mot cyclique $M(h)$ écrit sur un cercle entourant le point fixe. Cette écriture peut être vue comme le dessin d'un champ de vecteurs le long du cercle. L'indice de Poincaré-Lefschetz est alors égal à l'indice de ce champ de vecteurs symbolique, c'est-à-dire au nombre de tours effectués par les flèches-lettres du mot $M(h)$ lorsqu'on a écrit ce mot autour du cercle. Ainsi, le nouvel invariant peut être vu comme une manière canonique de décomposer le nombre de tours évalué par l'indice de Poincaré-Lefschetz en une somme de quarts-de-tour dans les sens positifs ou négatifs, somme dont les termes sont cycliquement ordonnés. On donnera une description plus précise de ce lien à la section 4, dans le cadre des feuilletages.

Exercice 2.12. — Que vaut l'indice de Poincaré-Lefschetz pour le dessin de la figure 15 ?

e. Invariant global vs invariant local. — La figure 16 montre deux homéomorphismes du plan, fixant uniquement le point 0, avec un indice égal à 0, qui ont le même germe au voisinage du point fixe. Cependant, leurs indices par quarts-de-tour diffèrent. Ceci montre que cet invariant n'est pas un invariant de la dynamique locale.

Peut-on fabriquer un invariant de dynamique locale à partir de l'indice par quarts-de-tour ? Voici une suggestion. Notons \mathcal{H} l'ensemble des homéomorphismes du plan, préservant l'orientation, ayant pour seul point fixe 0, d'indice différent de 1 (ceux pour lesquels nous savons définir l'indice par quarts-de-tour). Soit $h \in \mathcal{H}$, on peut considérer l'ensemble

$$\mathcal{H}_h := \{h_0 \in \mathcal{H}, h_0 = h \text{ sur un voisinage de } 0\}.$$

Comment définir le *module local* de h en 0 ? Il y a deux possibilités naturelles, prendre le *minimum* ou le *maximum* des modules des $h_0 \in \mathcal{H}_h$. On peut montrer que le minimum ne

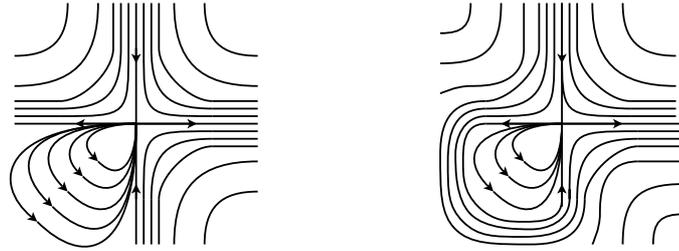


FIGURE 16. Un germe donné peut s'étendre de plusieurs manières, donnant différents indices par quarts-de-tour : ici $(\uparrow \rightarrow \downarrow \leftarrow \uparrow \rightarrow \downarrow \rightarrow)$ et $(\uparrow \rightarrow \downarrow \leftarrow)$

donne aucune information (il vaut toujours $2 \mid \text{Ind}(h, 0) - 1 \mid$, où $\text{Ind}(h, 0)$ désigne l'indice de Poincaré-Lefschetz ; l'exemple de la figure 16 est typique). On choisit donc le maximum.

Exercice 2.13. — Montrer que les modules locaux des exemples des figures 10 et 11 sont infinis.

Restreignons-nous aux exemples de module local fini. Peut-on définir leur indice par quarts-de-tour ? La question revient au problème (ouvert) suivant :

Question. — Soit $h_0, h_1 \in \mathcal{H}$ deux homéomorphismes qui coïncident sur un voisinage de 0. On suppose que leur module est minimal parmi les homéomorphismes de \mathcal{H} qui ont le même germe en 0. Est-ce que leurs indices par quarts-de-tour sont égaux ?

Il n'est déjà pas complètement clair qu'il existe des homéomorphismes de module local fini !

Exercice 2.14. — Montrer que les exemples-modèles ont un module local égal à leur module (c'est facile !). Montrer que leur indice par quarts-de-tour est bien défini (beaucoup plus dur !).

Le cas vraiment intéressant est bien sûr celui des homéomorphismes de module local infini.

Question. — Comment définir un indice par quarts-de-tour dans ce cas ?

3. Feuilletages du plan sans singularités

Nous avons deux bonnes raisons de nous intéresser aux feuilletages des surfaces. La première raison est d'ordre pédagogique : les exemples les plus simples d'homéomorphismes sont ceux qui se plongent dans un flot, obtenu en intégrant un champ de vecteurs ; ils préservent chaque feuille du feuilletage en orbites du flot. Tous les exemples de la section 1 ont cette propriété, sauf le dernier. Pour comprendre la dynamique des homéomorphismes, il est donc raisonnable de commencer par étudier celle des flots ou des feuilletages. Dans cet esprit, nous allons donner une version de l'indice par quarts-de-tour pour les feuilletages de l'anneau $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

La deuxième raison tient au théorème feuilleté de Patrice Le Calvez. Celui-ci nous fournit des feuilletages “transverses” à la dynamique d'un homéomorphisme de surface donné, et la compréhension de ces feuilletages donne en retour des résultats sur la dynamique de l'homéomorphisme.

Nous allons donc étudier les feuilletages du plan avec une singularité, qui sont l'analogie des homéomorphismes du plan avec un point fixe. Notre stratégie consistera à enlever la singularité et à passer au revêtement universel du plan troué. On obtient ainsi un feuilletage du plan sans singularité. Nous commençons ici par étudier le cadre sans singularité ; nous appliquerons cette stratégie dans la section suivante pour transposer l'étude au cadre avec singularité.

a. Définition, exemples. —

Définition. — Un *feuilletage continu* d'une surface S est une partition \mathcal{F} de la surface en parties connexes F appelées *feuilles*, telle que, pour tout point x du plan, il existe un voisinage U_x de x dit *trivialisant*, et un homéomorphisme $\varphi_x : U_x \rightarrow]0, 1[$ appelé *carte* avec la propriété suivante : pour toute feuille F , pour toute composante connexe γ de $F \cap U_x$, $\varphi_x(\gamma)$ est un segment horizontal $]0, 1[\times \{y\}$. La feuille passant par un point x sera notée F_x . Le feuilletage est dit *de classe C^1* si les “changements de cartes” $\varphi_x \circ \varphi_y^{-1}$ sont de classe C^1 .

L'exemple le plus simple est donné par le feuilletage \mathcal{F}_0 du plan par les droites horizontales. Ce feuilletage, comme tout feuilletage qui lui est homéomorphe, est appelé *feuilletage trivial*. Voici un autre exemple. On part de la famille d'hyperboles $\{xy = k, k \in \mathbb{R}\}$. Cette famille forme bien une partition du plan, mais pas un feuilletage, parce qu'il n'y a pas de carte au voisinage du point 0. Si l'on enlève le point 0 (et que l'on remplace l'ensemble dégénéré $\{xy = 0\} \setminus \{0\}$ par ses quatre composantes connexes), on obtient un feuilletage \mathcal{F} de l'anneau $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Voici deux façons de se ramener au plan (figure 17).

1. Soit $\Pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ le revêtement universel. Puisque Π est un homéomorphisme local, on peut “tirer en arrière” le feuilletage \mathcal{F} par l'application Π . On obtient ainsi un feuilletage \mathcal{F}_1 non trivial du plan. Les feuilles de \mathcal{F}_1 sont les composantes connexes des ensembles $\Pi^{-1}(F)$ où F est une feuille de \mathcal{F} , les ouverts trivialisants sont les composantes connexes des $\Pi^{-1}(U_x)$, les cartes sont les applications $\varphi_x \circ \Pi$.
2. On considère la restriction du feuilletage \mathcal{F} au trois-quart-de-plan $O = \{x > 0 \text{ ou } y > 0\}$. L'ensemble O est homéomorphe au plan, par identification on obtient un feuilletage \mathcal{F}_2 du plan appelé *feuilletage de Reeb*.

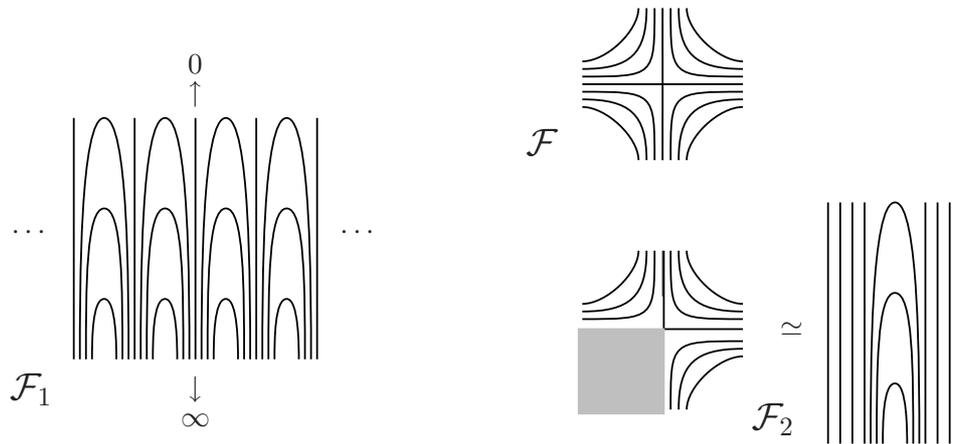


FIGURE 17. Premiers exemples de feuilletages non triviaux

Champs de vecteurs, flots et feuilletages. — Si l'on a un champ de vecteurs du plan (suffisamment régulier et borné), on peut appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz, qui nous dit que le champ de vecteurs s'intègre en un *flot*, c'est-à-dire en un sous-groupe à un paramètre $\Phi = (\Phi^t)_{t \in \mathbb{R}}$ de difféomorphismes du plan. Le "théorème de la boîte à flot" dit que les orbites de ce flot forment un feuilletage sur le complémentaire des zéros du champ de vecteurs.

Réciproquement, soit \mathcal{F} un feuilletage de classe C^1 . Supposons que \mathcal{F} soit *orientable*, c'est-à-dire qu'on peut munir chaque feuille d'un sens de parcours de manière continue (tout point x admet une carte dans laquelle les feuilles parcourues positivement sont envoyées sur les segments horizontaux parcourus de la gauche vers la droite). On peut alors considérer le champ de vecteurs \vec{V} unitaire tangent au feuilletage (en chaque point x , \vec{V}_x est le vecteur tangent à la feuille F_x passant par x et orienté dans le sens du parcours de F_x). Les orbites du flot du champ \vec{V} sont les feuilles du feuilletage \mathcal{F} .

Dans toute la suite, on supposera toujours que le feuilletage est orientable et de classe C^1 , et qu'il est engendré par un champ de vecteurs (voir aussi la section e).

Transversales. — Soit \mathcal{F} un feuilletage du plan. Une courbe $\gamma : [0, 1]$ ou $]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}^2$ est dite *transverse au feuilletage au point $\gamma(t_0)$* si il existe une carte φ définie au voisinage du point $\gamma(t_0)$ telle que l'application $t \mapsto y(\varphi(\gamma(t)))$ est injective au voisinage de t_0 (où y désigne l'application seconde coordonnée). On dira que la courbe γ est une *transversale* du feuilletage (ou est *transverse*) si elle est transverse en chacun de ses points.

Nous utiliserons plusieurs fois le résultat de l'exercice suivant.

Exercice 3.1. — Montrer qu'un feuilletage du plan est trivial (c'est-à-dire homéomorphe au feuilletage du plan par les droites horizontales) si et seulement si il admet une transversale qui coupe une et une seule fois chaque feuille. Montrer que \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 (figure 17) sont non triviaux (autrement dit, qu'il n'existe pas d'homéomorphisme du plan transportant \mathcal{F}_1 ou \mathcal{F}_2 sur le feuilletage trivial. Montrer au contraire que le feuilletage \mathcal{F}_3 , obtenu comme restriction au demi-plan $O' = \{x > 0\}$ du feuilletage \mathcal{F} en hyperboles est trivial.

Exercice 3.2. — Donner une vraie définition de la notion de *feuilletage orienté*, en considérant les changements de cartes.

Exercice 3.3. — Soit O un ouvert obtenu en enlevant au plan une demi-droite verticale vers le bas, par exemple

$$O = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, y), y \leq 0\}.$$

Soit \mathcal{F} le feuilletage induit sur O par le feuilletage du plan par les droites horizontales. Ce feuilletage est homéomorphe à l'un des exemples de ce paragraphe, voyez-vous lequel ?

b. La théorie de Poincaré-Bendixson. — Pour les feuilletages du plan, la théorie de Poincaré-Bendixson dit que chaque feuille va à l'infini dans l'espace $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$.

Théorème 3.4 (Poincaré-Bendixson). — Soit Φ un flot obtenu en intégrant un champ de vecteurs \vec{V} du plan qui ne s'annule pas. Alors pour tout point x du plan, on a

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \Phi^t(x) = \infty.$$

Démonstration. — Supposons, par l'absurde, que $\Phi^t(x)$ ne tende pas vers l'infini. Alors cette courbe s'accumule en un point du plan : en particulier, il existe un ouvert trivialisant U dans lequel l'orbite de x passe une infinité de fois. Soit γ une courbe de Jordan formé du morceau γ_1 de la feuille F_x entre deux passages successifs dans U et d'un arc γ_2 inclus dans U , comme sur la figure 18. D'après le théorème de Schoenflies (Appendice, théorème 6.1),

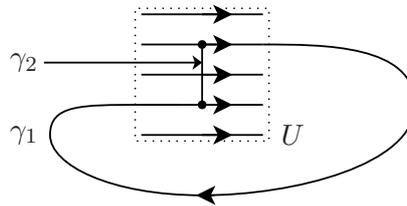


FIGURE 18. S'il existe une orbite qui ne va pas à l'infini...

γ est la frontière d'un disque topologique fermé D .⁽¹³⁾ Il y a deux cas possibles : ou bien le champ \vec{V} est tangent ou rentrant en tout point de la frontière de D , ou bien il est tangent ou sortant. Quitte à changer Φ^t en Φ^{-t} , on peut supposer qu'on est dans le premier cas. Alors D est un attracteur : pour tout $t > 0$ on a $\Phi^t(D) \subset D$. Dans cette situation, le lemme suivant nous fournit un *point fixe* du flot, c'est-à-dire un point x_∞ tel que $\Phi^t(x_\infty) = x_\infty$ pour tout t . Ceci termine la preuve, puisque le champ de vecteur devrait s'annuler en x_∞ .

Lemme 3.5 (Théorème du point fixe de de Brouwer pour les flots)

Soit $(\Phi^t)_{t \in \mathbb{R}}$ un flot du plan, et D un disque tel que $\Phi^t(D) \subset D$ pour tout $t > 0$. Alors il existe un point fixe du flot dans D .

□

⁽¹³⁾C'est-à-dire d'un ensemble homéomorphe au disque unité fermé du plan.

Preuve du lemme. — Le théorème de Brouwer sur les applications continues du disque nous dit que chaque application Φ^t admet un point fixe x_t . Soit x_∞ un point valeur d'adhérence de la suite $(x_{2^{-n}})_{n \geq 0}$. Alors x_∞ est fixe pour chaque application $\Phi^{2^{-n}}$. D'autre part, si x_∞ n'était pas fixe, en considérant une boîte à flot en x_∞ , on voit qu'il existerait un $\varepsilon > 0$ tel que $\Phi^t(x) \neq x$ pour tout $t \in]0, \varepsilon[$, ce qui serait contradictoire. \square

En fait l'argument donné dans la preuve prouve bien plus que ce qui était annoncé. On a montré que la situation décrite sur la figure 18 ne peut pas arriver, c'est-à-dire qu'*aucune feuille ne peut couper un ouvert trivialisant plus d'une fois*. Voici différentes versions de cette remarque.

Corollaire 3.6 (de la preuve). — *Soit \mathcal{F} un feuilletage du plan (sans singularité).*

1. *Soit F une feuille de \mathcal{F} , U un ouvert trivialisant. Alors $F \cap U$ est connexe (ou vide). De même, si γ est une transversale, alors F coupe γ en au plus un point.*
2. *Soit E le saturé d'un ouvert trivialisant U ou d'un arc transverse $\gamma :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}^2$. Alors E est un ouvert trivialisant.*

Le théorème de Poincaré-Bendixson permet de décrire la topologie du plongement d'une feuille dans le plan. Soit F une feuille de \mathcal{F} . Puisque les feuilles vont à l'infini, l'ensemble $F \cup \{\infty\}$ forme une courbe de Jordan dans la sphère $\mathbb{S}^2 \cup \{\infty\}$. D'après les théorèmes de Jordan et Schoenflies (Appendice, théorème 6.1), toute feuille sépare le plan, et on peut toujours se ramener au cas où la feuille est une droite.⁽¹⁴⁾

Corollaire 3.7. —

1. *Le complémentaire d'une feuille a deux composantes connexes ;*
2. *Pour toute feuille F , il existe un homéomorphisme du plan qui envoie F sur une droite.*

Ceci marche encore pour les couples de feuilles : la topologie d'un couple (F_1, F_2) est toujours la même que celle d'un couple de droites horizontales. Par contre, pour les triplets, il y a essentiellement deux possibilités, selon que l'une des feuilles sépare les deux autres ou non. De façon générale, il n'y a qu'un nombre fini de possibilités pour la topologie d'une famille finie de feuilles, et celle-ci peut être décrite combinatoirement.

Voici encore une autre façon de voir le corollaire 3.6. Notons \mathbb{R}^2/\mathcal{F} l'espace des feuilles de \mathcal{F} , c'est-à-dire l'espace quotient du plan par la relation d'équivalence induite par le feuilletage. Soit F une feuille, et $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ un arc transverse au feuilletage, avec $\gamma(1/2) \in F$. Le corollaire dit que l'application $t \mapsto F_{\gamma(t)}$ est injective ; elle établit donc un homéomorphisme entre $[0, 1]$ et un voisinage de F dans l'espace des feuilles. Autrement dit, l'espace des feuilles est une variété topologique de dimension 1.

Exercice 3.8. — Montrer qu'on peut obtenir le théorème de Poincaré-Bendixson comme une conséquence de la théorie de Brouwer, par exemple du corollaire 1.6 de [Bon06] qui dit que pour un homéomorphisme du plan, préservant l'orientation et sans point fixe, les orbites partent à l'infini.

⁽¹⁴⁾On perd cependant le caractère C^1 du feuilletage, à moins de disposer d'un théorème de Schoenflies différentiable.

Aide : on peut commencer par montrer que, quitte à multiplier le champ de vecteur \vec{V} par une fonction strictement positive, le difféomorphisme Φ^t n'a pas de point fixe pour t assez petit.

Exercice 3.9. — Nous avons vu qu'aucune feuille du feuilletage ne peut couper une transversale plus d'une fois. D'autre part, voici un énoncé du cours de M. Bonino (corollary 1.6, légèrement modifié) : Soit h un homéomorphisme du plan, préservant l'orientation, sans courbe d'indice 1. Soit γ un arc libre, c'est-à-dire tel que $h(\gamma) \cap \gamma = \emptyset$. Alors pour tout entier $n \neq 0$, on a $h^n(\gamma) \cap \gamma = \emptyset$. Quel est le lien entre ces deux énoncés ?

Exercice 3.10. — Trouver trois feuilles du feuilletage de Reeb telles qu'aucune ne sépare les deux autres.

Exercice 3.11. — Il n'y a que deux variétés de dimension 1 : le cercle et la droite. À quelle variété de dimension 1 correspond l'espace des feuilles du feuilletage trivial ? Même question pour le feuilletage de Reeb...

c. Existence des composantes de Reeb. — Le lecteur expérimenté a probablement décelé le piège de l'exercice 3.11 : l'espace des feuilles d'un feuilletage du plan forme bien une variété de dimension 1 (au sens "espace topologique localement homéomorphe à \mathbb{R} "), mais ne vérifie pas l'axiome de séparation⁽¹⁵⁾. Il n'y a que deux variétés *séparées* de dimension 1, mais une infinité de variétés non séparées...

Exercice 3.12. — Montrer que les deux feuilles $\{x = 0, y > 0\}$ et $\{x > 0, y = 0\}$ de notre modèle de feuilletage de Reeb \mathcal{F}_2 (figure 17) ne sont pas séparées dans l'espace des feuilles. Montrer que l'espace des feuilles de ce feuilletage est homéomorphe au *branchement simple*, obtenu comme l'espace quotient de $\mathbb{R} \times \{0, 1\}$ par la relation d'équivalence engendrée par $(0, t) \sim (1, t)$ si $t < 0$. Relier cette description à la topologie des triplets de feuilles de ce feuilletage.

Ce constat conduit à la notion de composantes de Reeb, qui généralise l'exemple du feuilletage de Reeb. Nous allons voir que cette notion est essentielle pour la description de nos feuilletages.

Définition 3.13. — Une *composante de Reeb* du feuilletage \mathcal{F} est un couple (Δ_1, Δ_2) de feuilles de \mathcal{F} qui ne sont pas séparées dans l'espace des feuilles : pour tout voisinage saturé U_1 de Δ_1 , et pour tout voisinage saturé U_2 de Δ_2 , on a $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$.

Voici une autre formulation : (Δ_1, Δ_2) est une composante de Reeb s'il existe une suite de feuilles (F_k) qui s'accumule à la fois sur Δ_1 et Δ_2 .

Soit (Δ_1, Δ_2) une composante de Reeb. Notons P_1 la composante connexe du complémentaire de Δ_1 qui ne contient pas Δ_2 ; on définit P_2 symétriquement. On dit que la composante de Reeb (Δ_1, Δ_2) *sépare* un couple de points (x, y) si $x \in \text{Adhe}(P_1)$ et $y \in \text{Adhe}(P_2)$.⁽¹⁶⁾

⁽¹⁵⁾Axiome de séparation : pour tous $x \neq y$ il existe deux voisinages respectifs U_x, U_y de x, y qui sont disjoints.

⁽¹⁶⁾Dans cette définition, on autorise donc x à être sur Δ_1 .

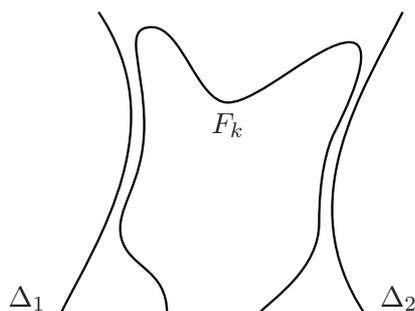
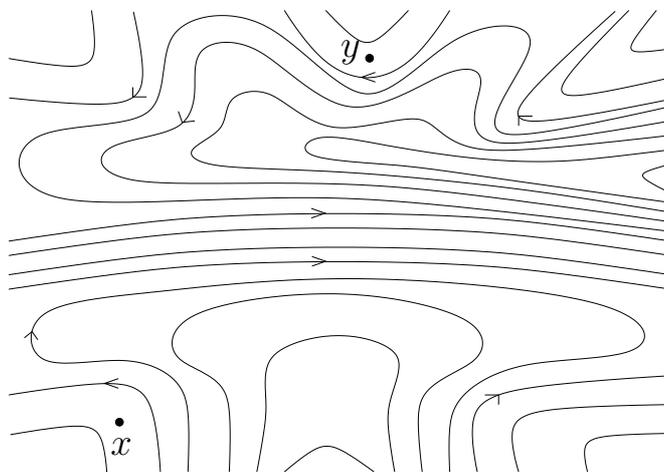


FIGURE 19. Définition des composantes de Reeb

Distance dynamique pour les feuilletage. — On introduit maintenant la notion de distance analogue à la notion de longueur de courbes associée à un homéomorphisme (voir la section 2.a).

On appelle *distance dynamique associée au feuilletage \mathcal{F}* , et on note $d_{\mathcal{F}}$, l'application $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ définie de la façon suivante : $d_{\mathcal{F}}(x, y)$ est le nombre minimal d'arcs simples, transverses au feuilletage, dont la réunion forme un arc simple qui va de x à y .⁽¹⁷⁾ Nous arrivons maintenant à l'énoncé d'un théorème qui décrit une partie de la structure des feuilletages du plan.

Théorème 3.14. — Soient \mathcal{F} un feuilletage du plan, et x, y deux points du plan. Notons $d = d_{\mathcal{F}}(x, y)$. Alors il existe exactement $d - 1$ composantes de Reeb qui séparent le couple (x, y) .

Figure 20. Trouver les composantes de Reeb associées au couple (x, y) ...

Exercice 3.15. — Soit \mathcal{F} le feuilletage représenté sur la figure 20. Montrer que $d_{\mathcal{F}}(x, y) = 3$. Trouver les deux composantes de Reeb qui séparent x et y . Décrire l'ensemble des points qui sont à distance 1 de x .

⁽¹⁷⁾Ceci vaut pour $x \neq y$; bien sûr, on pose aussi $d_{\mathcal{F}}(x, x) = 0$ pour tout x .

Preuve du théorème. — Pour simplifier un peu, on explique le cas $d = 2$. On cherche alors une composante de Reeb qui sépare (x, y) .

On commence par trouver un candidat (Δ_1, Δ_2) à être la composante de Reeb. Pour cela, on considère la “boule de centre x et de rayon 1 pour la distance dynamique”, c’est-à-dire l’ensemble $B_1(x)$ des points z du plan tels que $d_{\mathcal{F}}(x, z) = 1$. C’est un ensemble saturé par le feuilletage, qui ne contient pas y . Sa frontière topologique $\partial B_1(x)$ est aussi une réunion de feuilles ; de deux choses l’une : ou bien elle contient y , ou bien elle sépare x et y . Dans le premier cas, on choisit pour Δ_2 la feuille passant par y . Dans le second, il existe une unique feuille incluse dans $\partial B_1(x)$ qui sépare x et y .⁽¹⁸⁾ On choisit pour Δ_2 cette feuille. De même, dans le cas où x est sur la frontière de $B_1(y)$, on pose $\Delta_1 := F_x$; dans le cas contraire, Δ_1 est définie comme l’unique feuille incluse dans $\partial B_2(y)$ qui sépare x et y .

La partie “existence” du théorème suit maintenant de deux affirmations.

Affirmation 3.16. — On a $\Delta_1 \subset \partial B_1(\Delta_2)$ et $\Delta_2 \subset \partial B_1(\Delta_1)$.

Affirmation 3.17. — Soient Δ_1, Δ_2 deux feuilles de \mathcal{F} . Si $\Delta_1 \subset \partial B_1(\Delta_2)$ et $\Delta_2 \subset \partial B_1(\Delta_1)$ alors (Δ_1, Δ_2) est une composante de Reeb.

Preuve de la première affirmation. — Soit $\gamma = \gamma_1 * \gamma_2$ un arc (dit “géodésique”) allant de x à y , avec γ_1 et γ_2 transverses au feuilletage. Par définition, Δ_2 ne rencontre pas γ_1 qui est inclus dans $B_1(x)$, et Δ_2 sépare x et y ; donc Δ_2 rencontre γ_2 . De même, Δ_1 rencontre γ_1 . La situation topologique est donc celle décrite par la figure 21, gauche. Supposons

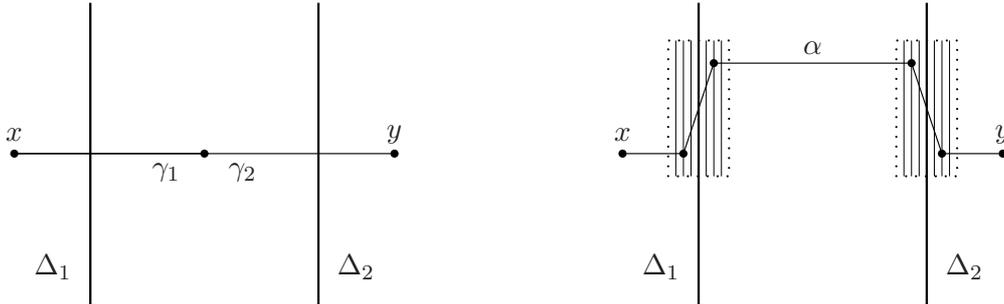


FIGURE 21. Preuve de l’affirmation 3.16

maintenant que $d_{\mathcal{F}}(\Delta_1, \Delta_2) = 1$, c’est-à-dire qu’il existe un arc α transverse au feuilletage allant de Δ_1 à Δ_2 . On fabrique alors facilement un arc transverse au feuilletage allant de x à y (voir la figure 21, droite : construire d’abord un arc “quasi-transverse” en suivant γ_1 de x à Δ_1 , puis Δ_1 jusqu’au point de α , puis α , et enfin Δ_2 et un morceau de γ_2). Ceci contredit l’hypothèse $d_{\mathcal{F}}(x, y) = 2$.

On a donc $d_{\mathcal{F}}(\Delta_1, \Delta_2) > 1$. Mais puisque Δ_1 sépare x de Δ_2 qui est inclus dans la frontière de $B_1(x)$, il est clair que Δ_2 est dans l’adhérence de $B_1(\Delta_1)$. Finalement, $\Delta_2 \subset \text{Adhe}(B_1(\Delta_1)) \setminus B_1(\Delta_1) = \partial B_1(\Delta_1)$. L’autre relation est bien sûr symétrique. \square

⁽¹⁸⁾Pour vérifier ceci, utiliser le fait que chaque feuille sépare le plan. L’unicité vient facilement. Pour l’existence, prendre un arc γ allant de x à y ; il coupe un nombre fini de feuilles de $\partial B_1(x)$; si aucune d’entre elles ne sépare, on peut modifier γ de façon à le rendre disjoint de $\partial B_1(x)$, ce est contradictoire.

Preuve de la deuxième affirmation. — On va plutôt montrer cette affirmation sous la forme suivante. On suppose que (Δ_1, Δ_2) n'est pas une composante de Reeb, et que $\Delta_2 \subset \partial B_1(\Delta_1)$; on veut montrer que Δ_1 est disjoint de $\text{Adhe}(B_1(\Delta_2))$.

Puisque (Δ_1, Δ_2) n'est pas une composante de Reeb, il existe un voisinage (ouvert) saturé U de Δ_2 tel que $\Delta_1 \not\subset \text{Adhe}(U)$. Et puisque $\Delta_2 \subset \partial B_1(\Delta_1)$, le voisinage U rencontre $B_1(\Delta_1)$: on peut donc trouver un arc γ_1 , transverse au feuilletage, joignant Δ_1 à un point de $\text{Adhe}(U)$; quitte à raccourcir γ_1 , on peut supposer qu'il est disjoint de U . Notons F la feuille de $\text{Adhe}(U)$ qui rencontre γ_1 . Comme U est saturé par le feuilletage, il forme un demi-voisinage de F (c'est-à-dire que $\text{Adhe}(U)$ est un voisinage de F dans l'adhérence de la composante connexe de $\mathbb{R}^2 \setminus F$ contenant U). Comme γ_1 est disjoint de U , F sépare γ_1 et U , et elle sépare donc aussi Δ_1 et Δ_2 .

Montrons enfin que Δ_1 est disjoint de $\text{Adhe}(B_1(\Delta_2))$. Dans le cas contraire, puisque F sépare Δ_1 et Δ_2 , il existerait un arc γ_2 transverse au feuilletage et joignant Δ_2 à F . On aurait donc deux arcs γ_1 et γ_2 , transverses au feuilletage, aboutissant en F , et séparé par F , l'un issu de Δ_1 et l'autre de Δ_2 . On en déduit facilement un arc γ transverse au feuilletage et joignant Δ_1 et Δ_2 (en utilisant le même type de construction que sur la figure 21, droite). Ceci implique $d_{\mathcal{F}}(\Delta_1, \Delta_2) = 1$, et donc $\Delta_2 \subset B_1(\Delta_1)$, une contradiction. \square

Il reste à vérifier la partie “unicité” du théorème : nous supposons qu'il existe deux composantes de Reeb distinctes (Δ_1, Δ_2) et (Δ'_1, Δ'_2) séparant x et y , et nous voulons montrer que ceci force $d_{\mathcal{F}}(x, y) > 2$.

Supposons par exemple $\Delta_1 \neq \Delta'_1$. On dessine Δ_1 et Δ_2 (comme sur la figure 21, gauche), et on se demande où peut bien être la feuille Δ'_1 . Elle ne peut pas séparer Δ_1 et Δ_2 (il est très facile de voir qu'aucune feuille ne sépare les deux feuilles d'une composante de Reeb⁽¹⁹⁾). Supposons par exemple qu'elle est du côté de Δ_2 qui contient le point y . Alors Δ'_2 est également de ce côté de Δ_2 (à nouveau, parce que Δ_2 ne peut pas séparer les deux feuilles de la composante (Δ'_1, Δ'_2)). En particulier, la bande ouverte O comprise entre Δ_1 et Δ_2 est disjointe de la bande ouverte O' comprise entre Δ'_1 et Δ'_2 .

Considérons maintenant un arc γ joignant x à y . Soit α un sous-arc de γ joignant Δ_1 à Δ_2 , et de même α' un sous-arc de γ joignant Δ'_1 à Δ'_2 ; on suppose α et α' minimaux pour l'inclusion. Puisque O et O' sont disjointes, α et α' sont disjoints (sauf peut-être à une extrémité). Puisque (Δ_1, Δ_2) est une composante de Reeb, on voit facilement que α ne peut pas être transverse au feuilletage (sans quoi toute feuille rencontrant α séparerait Δ_1 et Δ_2). Même chose pour α' . Ceci montre que la \mathcal{F} -longueur de γ est au moins 3. Par conséquent $d_{\mathcal{F}}(x, y) \geq 3$, ce que l'on voulait. \square

Exercice 3.18. — Montrer que $d_{\mathcal{F}}$ est bien une distance sur le plan (bien sûr, elle n'induit pas la topologie usuelle!). Montrer que $d_{\mathcal{F}}(x, y)$ est aussi le nombre minimal d'ouverts trivialisants dont la réunion est connexe et contient x et y . Montrer que cette distance induit une distance sur l'espace des feuilles : pour tout $x' \in F_x, y' \in F_y$, on a $d_{\mathcal{F}}(x', y') = d_{\mathcal{F}}(x, y)$.

Exercice 3.19. — Soit $\gamma = \gamma_1 * \gamma_2$ un arc simple géodésique joignant deux points x, y tels que $d_{\mathcal{F}}(x, y) = 2$, où γ_1 et γ_2 sont transverses au feuilletage. Soit $z = \gamma_1 \cap \gamma_2$ le point de raccord de ces

⁽¹⁹⁾Voir aussi l'exercice 3.21.

deux arcs. Dessiner l'allure locale des deux arcs dans une carte au point z ; montrer en particulier qu'il n'y a qu'une seule possibilité.

Exercice 3.20. — Montrer que la réciproque de l'affirmation 3.17 est vraie.

Exercice 3.21. — On peut simplifier la preuve du théorème si on admet le lemme suivant.

Lemme 3.22. — *Le couple de feuilles (Δ_1, Δ_2) est une composante de Reeb si et seulement si aucune feuille Δ ne sépare Δ_1 de Δ_2 .*

Réécrire la preuve du théorème à l'aide du lemme. Démontrer l'unicité. Démontrer le lemme (l'implication directe, que nous avons déjà utilisée dans la preuve de l'unicité, est très facile; l'implication réciproque est plus difficile).

Remarque. — À l'aide du théorème, on peut retrouver un résultat classique de structure des feuilletages du tore.

Corollaire 3.23. — *Soit \mathcal{F} un feuilletage du tore. Alors de deux choses l'une :*

1. \mathcal{F} admet une courbe fermée transverse. Autrement dit, \mathcal{F} est la suspension d'un homéomorphisme du cercle.
2. \mathcal{F} admet un anneau feuilleté en composante de Reeb (en particulier, une et même deux feuilles fermées).

d. Dynamique des composantes de Reeb. — Soit Δ une feuille, elle sépare le plan en deux ouverts. Puisque le feuilletage est orienté, les deux composantes connexes de $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$ peuvent être distinguées en une partie à gauche de la feuille orientée $\vec{\Delta}$ et une partie à droite de $\vec{\Delta}$.

Soit maintenant $(\vec{\Delta}_1, \vec{\Delta}_2)$ un couple de feuilles orientées distinctes. On a quatre possibilités :

1. $\vec{\Delta}_1$ est à gauche de $\vec{\Delta}_2$ et $\vec{\Delta}_2$ est à droite de $\vec{\Delta}_1$;
2. $\vec{\Delta}_1$ est à droite de $\vec{\Delta}_2$ et $\vec{\Delta}_2$ est à gauche de $\vec{\Delta}_1$;
3. $\vec{\Delta}_1$ est à gauche de $\vec{\Delta}_2$ et $\vec{\Delta}_2$ est à gauche de $\vec{\Delta}_1$;
4. $\vec{\Delta}_1$ est à droite de $\vec{\Delta}_2$ et $\vec{\Delta}_2$ est à droite de $\vec{\Delta}_1$.

On dira que les deux droites sont orientées *dans le même sens* dans les deux premiers cas, *dans des sens opposés* dans les deux derniers.

Lemme 3.24. —

1. Si $\vec{\Delta}_1$ et $\vec{\Delta}_2$ coupent une même transversale au feuilletage, alors elles sont orientées dans le même sens.
2. Si $(\vec{\Delta}_1, \vec{\Delta}_2)$ est une composante de Reeb, alors elles sont orientées dans des sens opposés.

Démonstration. — Le premier point est clair, puisqu'alors les deux droites sont incluses dans un même ouvert trivialisant. Montrons le second point par l'absurde. Supposons par exemple (l'autre cas est symétrique) que $\vec{\Delta}_1$ est à gauche de $\vec{\Delta}_2$ et $\vec{\Delta}_2$ est à droite de $\vec{\Delta}_1$. Soient γ_1, γ_2 deux transversales respectivement à $\vec{\Delta}_1$ et $\vec{\Delta}_2$. Si $(\vec{\Delta}_1, \vec{\Delta}_2)$ est une composante de Reeb, la définition nous donne l'existence d'une troisième feuille F qui coupe à la fois

γ_1 et γ_2 ; cette feuille F est donc située entre $\vec{\Delta}_1$ et $\vec{\Delta}_2$, autrement dit à droite de $\vec{\Delta}_1$ et à gauche de $\vec{\Delta}_2$. On applique alors le premier point du lemme aux couples $(\vec{\Delta}_1, F)$ d'une part, et $(\vec{\Delta}_2, F)$ d'autre part : on voit que $\vec{\Delta}_1$ est située à gauche de F , tandis que $\vec{\Delta}_2$ est à droite de F . Donc F sépare les deux feuilles. Mais ceci interdit au couple $(\vec{\Delta}_1, \vec{\Delta}_2)$ d'être une composante de Reeb (c'est le sens facile du lemme 3.22). \square

Considérons à nouveau, comme dans la preuve du lemme, une composante de Reeb $(\vec{\Delta}_1, \vec{\Delta}_2)$, deux transversales γ_1, γ_2 et une feuille F qui coupe γ_1 et γ_2 . Supposons de plus que les deux transversales γ_1 et γ_2 sont disjointes. Dans cette situation nous avons encore deux possibilités, selon que la feuille orientée \vec{F} rencontre γ_1 avant γ_2 , ou le contraire (rappelons que F ne peut pas couper une transversale en plus qu'un point). Nous dirons que la dynamique du feuilletage *va de Δ_1 vers Δ_2* si il existe γ_1, γ_2 et \vec{F} rencontrant γ_1 avant γ_2 ; nous dirons que la dynamique *va de Δ_2 vers Δ_1* si il existe γ_1, γ_2 et \vec{F} rencontrant γ_2 avant γ_1 . Il n'est pas clair *a priori* que ces deux cas soient disjointes; c'est cependant vrai.

Lemme 3.25. — *De deux choses l'une : ou bien la dynamique va de Δ_1 vers Δ_2 , ou bien elle va de Δ_2 vers Δ_1 .*

Démonstration. — Dans un premier temps, nous fixons les transversales γ_1 et γ_2 , et nous montrons que la situation ne dépend pas du choix de la feuille \vec{F} . Le problème est alors essentiellement le suivant : *étant données deux ouverts trivialisants disjoints U_1, U_2 et deux feuilles \vec{F}_1, \vec{F}_2 , montrer qu'on ne peut pas avoir à la fois \vec{F}_1 qui rencontre U_1 avant U_2 et \vec{F}_2 qui rencontre U_2 avant U_1 .* L'idée est que si la situation problématique se produisait, on pourrait modifier le feuilletage dans les deux ouverts trivialisant de façon à créer une feuille fermée, ce qui est interdit par le théorème de Poincaré-Bendixson appliqué au feuilletage modifié. Les détails (les dessins!) sont laissés au lecteur.⁽²⁰⁾

Considérons maintenant deux choix $\gamma_1, \gamma_2, \vec{F}$ et $\gamma'_1, \gamma'_2, \vec{F}'$. Soient U_1 un ouvert trivialisant qui contient à la fois $\gamma_1 \cap \Delta_1$ et $\gamma'_1 \cap \Delta_1$. On choisit U_1 pour que $\gamma_1 \cap U_1$ et $\gamma'_1 \cap U_1$ coupent toute feuille rencontrant U_1 (figure 22). Soit U_2 avec des propriétés analogues; on peut demander de plus que U_1 et U_2 soient disjoints (U_1 est un voisinage arbitrairement petit du morceau de la feuille Δ_1 entre γ_1 et γ'_1). Puisque (Δ_1, Δ_2) est une composante de Reeb, il existe une feuille \vec{F}'' qui rencontre à la fois U_1 et U_2 . Pour fixer les idées, supposons qu'elle rencontre U_1 avant U_2 . Alors elle rencontre aussi γ_1 avant γ_2 , et γ'_1 avant γ'_2 . En appliquant deux fois ce qui précède, on conclut d'abord que \vec{F} rencontre γ_1 avant γ_2 , et ensuite que \vec{F}' rencontre γ'_1 avant γ'_2 , ce que l'on voulait. \square

Finalement, étant donnée une composante de Reeb (Δ_1, Δ_2) , nous pouvons distinguer quatre possibilités : selon que Δ_2 est à droite ou à gauche de Δ_1 (ce qui force l'orientation de Δ_2 d'après le premier lemme), et selon le sens de la dynamique. Nous choisissons de représenter ces possibilités par quatre suites de trois flèches :

$$(\uparrow \rightarrow \downarrow), (\uparrow \leftarrow \downarrow), (\downarrow \rightarrow \uparrow), (\downarrow \leftarrow \uparrow).$$

⁽²⁰⁾ Alternativement, on peut considérer l'homéomorphisme $h = \Phi^\varepsilon$ où Φ est un flot engendrant le feuilletage et $\varepsilon > 0$ un temps choisi de façon à ce que les deux disques topologiques $\text{Adhe}(U_1)$ et $\text{Adhe}(U_2)$ contredisent le lemme de Franks 2.5. En fait, ce résultat doit être vu comme l'analogie, pour les feuilletages, du lemme de Franks.

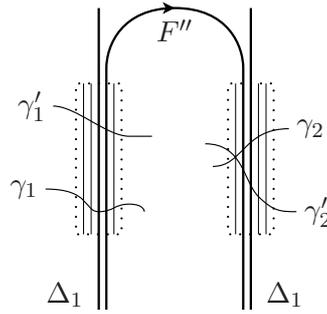


FIGURE 22. Dynamique des composantes de Reeb

Les flèches représentent respectivement l'orientation de Δ_1 , le sens de la dynamique, et l'orientation de Δ_2 (par exemple, le premier mot donne le cas Δ_2 à droite de Δ_1 et dynamique de Δ_1 vers Δ_2). On voit ainsi apparaître une partie de l'indice par quarts-de-tour pour les feuilletages.

Exercice 3.26 (difficile). — Soit (F, G) une composante de Reeb de type $(\downarrow, \rightarrow, \uparrow)$ d'un feuilletage orienté \mathcal{F} du plan. Soit B le quart-de-plan $\{x \geq 0, y \geq 0\} \setminus \{(0, 0)\}$ de la figure 17 à partir de laquelle on a défini le feuilletage de Reeb. Notons F_0 la demie-droite $\{x = 0, y > 0\}$, et $G_0 = \{x > 0, y = 0\}$.

Montrer qu'il existe un homéomorphisme $\varphi : B \rightarrow \varphi(B) \subset \mathbb{R}^2$ tel que $\varphi(F_0) = F$, $\varphi(G_0) = G$, et φ envoie le feuilletage en hyperboles de la figure 17 sur la restriction du feuilletage \mathcal{F} à $\varphi(B)$.

Aide : on peut obtenir $\varphi(B)$ comme le saturé d'un arc géodésique allant de F à G , privé de l'unique feuille tangente à l'arc. Attention, en général l'ensemble $\varphi(B)$ n'est pas fermé (voir les composantes de Reeb de l'exemple de la figure 20).

e. Commentaires. — En réalité, tous les résultats de ce chapitre restent vrais pour les feuilletages continus, sans hypothèse de différentiabilité. En particulier, étant donné un feuilletage continu du plan, on peut toujours trouver un flot topologique⁽²¹⁾ $(\Phi^t)_{t \in \mathbb{R}}$ dont les orbites sont les feuilles du feuilletage (mais ceci n'est pas immédiat, voir [Whi33], et aussi [Mor74]). On peut aussi montrer que tout feuilletage du plan est orientable.

Les feuilletages du plan sans singularité ont été étudiés par Kaplan [Kap40, Kap40], qui en donne une classification à l'aide de "systèmes chordaux". Puis Reeb, Heffliger et Godbillon ont revisité le problème avec le point de vue "fibré en droites au-dessus d'une variété de dimension 1 non séparée" ([HR57, GR66]). Malheureusement, à ma connaissance, aucun livre ne contient un exposé complet de ces résultats; l'exposé de Kaplan est assez fastidieux,⁽²²⁾ tandis que les trois auteurs suivants ne donnent pas de preuve de leur classification.

On pourrait proposer une troisième approche. Disons qu'un feuilletage est *de type fini* s'il ne contient qu'un nombre fini de composantes de Reeb. L'intérêt de ces feuilletages est double.

⁽²¹⁾C'est-à-dire une action continue du groupe \mathbb{R} sur le plan, ou encore une famille d'homéomorphismes du plan, dépendant continûment de t et vérifiant $\Phi^0 = Id$ et $\Phi^t \circ \Phi^s = \Phi^{t+s}$ pour tous t, s .

⁽²²⁾Chacun des deux articles contient une quarantaine de théorèmes, ce qui rend la structure logique opaque. De plus, il y a une erreur dans la preuve du théorème 35 du premier article (bien que tous les énoncés soient vrais).

D'une part, on peut montrer qu'il n'existe qu'un nombre fini de feuilletages ayant moins de n composantes de Reeb (à homéomorphisme près); donc les feuilletages de type fini sont dénombrables, et on peut en proposer une classification complète (par exemple au moyen de graphes décorés).

D'autre part, soit \mathcal{F} un feuilletage du plan (sans singularité), O un ouvert borné connexe, et $O_{\mathcal{F}}$ l'ouvert saturé de O par le feuilletage (union des feuilles de \mathcal{F} qui rencontrent O). On pourrait montrer que *le feuilletage induit par \mathcal{F} sur $O_{\mathcal{F}}$ est de type fini*. Cette remarque permet de voir tout feuilletage du plan comme une "limite" de feuilletages de type fini.

Enfin, il semble plausible (et intéressant) qu'on puisse répondre par l'affirmative à la question suivante.

Question. — *Soit \mathcal{F} un feuilletage du plan sans singularité. Peut-on trouver un ouvert connexe et simplement connexe O dans le plan \mathbb{R}^2 tel que le feuilletage \mathcal{F} soit homéomorphe au feuilletage induit sur O par les droites horizontales ? (voir l'exemple de l'exercice 3.3).*

En particulier, on retrouverait un résultat de Kaplan : *tout feuilletage du plan est homéomorphe au feuilletage par les lignes de niveau d'une fonction harmonique sur le plan (et en particulier, à un feuilletage lisse).*

Exercice 3.27. — Soit $(\Phi^t)_{t \in \mathbb{R}}$ un flot *topologique* du plan. On dit qu'un point p est fixe si $\Phi^t(p) = p$ pour tout t (le stabilisateur de p est \mathbb{R}). Soit O l'ouvert complémentaire des points fixes. Montrer que la partition du plan par les orbites du flot définit un feuilletage sur O .

Aide : soit $p \in O$; il s'agit essentiellement de trouver une transversale aux orbites du flot, c'est-à-dire une courbe qui passe par p et coupe localement chaque orbite en un unique point. Pour cela, Whitney ([**Whi33**]) propose de choisir $\varepsilon > 0$ tel que $\Phi^\varepsilon(p) \neq p$ et de définir la fonction

$$\theta(q) = \int_0^\varepsilon d(\Phi^t(q), p) dt$$

(où d est la distance sur le plan). Montrer que la fonction $\theta_q : t \mapsto \theta(\Phi^t(q))$ est dérivable, et que $\theta'_p(0) > 0$. En déduire que l'ensemble des q tels que $\theta(q) = \theta(p)$ forme localement une transversale.

Pour conclure, il faut probablement utiliser le théorème *d'invariance du domaine* de Brouwer : l'image d'un ouvert du plan par une application injective à valeurs dans le plan est encore un ouvert.

Exercice 3.28 (Si vous avez quelques semaines...). — Écrire les détails d'une classification des feuilletages du plan en suivant le schéma esquissé ci-dessus.

4. Feuilletages du plan avec une singularité

Dans cette partie, on considère un feuilletage orienté \mathcal{F} de l'anneau ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, que l'on peut voir comme un feuilletage sur le plan avec une singularité, c'est-à-dire un point qui n'admet pas de voisinage trivialisant. Pour simplifier, on suppose que ce feuilletage est de classe C^1 : autrement dit, il existe un champ de vecteurs \vec{V} ne s'annulant qu'en 0, qui s'intègre en un flot $(\Phi^t)_{t \in \mathbb{R}}$ du plan dont les orbites sont les feuilles de \mathcal{F} (et 0). Les exemples sont encore donnés par les dessins des dynamiques modèles de la section 1, vus comme des dessins de feuilletages orientés et non plus comme des dessins d'homéomorphismes. Le but de cette section est de montrer l'analogie des théorèmes 2.8 et 2.9, c'est-à-dire l'existence de l'indice par quarts-de-tour pour les feuilletages.

a. L'indice par quarts-de-tour pour les feuilletages. —

Indice de Poincaré-Hopf. — On peut définir l'indice de Poincaré-Hopf du feuilletage \mathcal{F} le long d'une courbe comme l'indice du champ de vecteurs \vec{V} . On définit ainsi l'indice de la singularité 0 du feuilletage, comme l'indice le long d'une courbe entourant le point 0.

Absence de récurrence. — En indice différent de 1, comme pour les homéomorphismes, il n'y a pas de récurrence : si Φ est un flot engendrant le feuilletage, alors pour tout point x , on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi^t(x) = 0 \text{ ou } \infty.$$

Ceci peut se montrer en appliquant le théorème 1.3 à l'homéomorphisme $h = \Phi^1$, ou encore en reprenant la preuve du théorème de Poincaré-Bendixson (montrer que, dans la situation de la figure 18, il y a une courbe d'indice 1).

Exercice 4.1. — On suppose que l'indice du point 0 est différent de 1. Alors le flot (Φ^t) n'a aucune orbite périodique (autre que 0). Montrer que l'indice de Poincaré-Hopf du point 0 pour le feuilletage \mathcal{F} coïncide avec l'indice de Poincaré-Lefschetz en tant que point fixe de chaque homéomorphisme Φ^t .

Cet exercice nous autorise à transporter notre feuilletage par un homéomorphisme : même si le feuilletage obtenu n'est plus de classe C^1 , on pourra toujours calculer son indice à partir des conjugués des homéomorphismes Φ^t . Comme l'indice d'un point fixe isolé d'un homéomorphisme est un invariant de conjugaison, on retrouvera bien l'indice de \mathcal{F} .

Module. — On peut maintenant définir la \mathcal{F} -longueur des courbes de Jordan entourant 0, le *module* du feuilletage, en mimant les définitions pour un homéomorphisme. Dans ces définitions, on remplace la notion d'*arc libre pour l'homéomorphisme* par celle d'*arc transverse au feuilletage*. Comme pour les homéomorphismes, on peut montrer facilement que, si l'indice est différent de 1, le module ne peut pas être égal à 1.

Composantes de Reeb. — Dans toute la suite, nous supposons que l'indice est différent de 1 ; le module d est donc ≥ 2 . On considère une courbe de Jordan géodésique γ pour le feuilletage \mathcal{F} : γ est donc constituée de d arcs transverses au feuilletage, où d est minimal. Soit $\Pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ le revêtement universel, on note $\tau : (x, y) \mapsto (x + 1, y)$ l'automorphisme du revêtement : on a donc identifié l'anneau ouvert avec le quotient \mathbb{R}^2/τ . Soit $\tilde{\mathcal{F}} = \Pi^{-1}(\mathcal{F})$: c'est un feuilletage du plan \mathbb{R}^2 dont chaque feuille se projette par Π sur une feuille de \mathcal{F} ; il n'a pas de singularité (c'est-à-dire qu'il s'agit bien d'un feuilletage

du plan au sens de la section 3). On pose $\tilde{\gamma} = \Pi^{-1}(\gamma)$. Cette construction est illustrée par la figure 23.

Considérons une décomposition minimale de γ :

$$\gamma = \gamma_1 * \cdots * \gamma_d = [x_1 x_2]_\gamma * \cdots * [x_d x_1]_\gamma.$$

La suite cyclique $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}$ des sommets de γ se relève en une suite périodique : $(\tilde{x}_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ avec $\Pi(\tilde{x}_i) = x_{i \bmod d}$ et $\tau(\tilde{x}_i) = \tilde{x}_{i+d}$. Il est clair que Π envoie les arcs transverses à $\tilde{\mathcal{F}}$ sur les arcs transverse à \mathcal{F} . Par conséquent, on a une décomposition minimale de $\tilde{\gamma}$,

$$\gamma = \cdots * [\tilde{x}_1 \tilde{x}_2]_{\tilde{\gamma}} * \cdots * [\tilde{x}_d \tilde{x}_{d+1}]_{\tilde{\gamma}} * \cdots$$

au sens où chaque arc de la décomposition est transverse au feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$, et on a $d_{\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{x}_i, \tilde{x}_{i+p}) = p$ pour tout entier positif p . La courbe $\tilde{\gamma}$ pourrait encore être appelée courbe géodésique (infinie). En appliquant le théorème 3.14, on trouve une suite de composantes de Reeb $(F_i, G_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ pour $\tilde{\mathcal{F}}$ associée à $\tilde{\gamma}$, : pour chaque i (F_i, G_i) est l'unique composante de Reeb séparant le couple $(\tilde{x}_{i-1}, \tilde{x}_{i+1})$. De plus, par unicité, cette suite est périodique : on a $\tau((F_i, G_i)) = (F_{i+d}, G_{i+d})$. On voit facilement que la topologie de F_i relativement à $\tilde{\gamma}$ est celle de la figure 23 : chaque feuille F_i coupe $\tilde{\gamma}$ en un unique point situé entre \tilde{x}_{i-1} et \tilde{x}_i . De même, chaque feuille G_i coupe $\tilde{\gamma}$ en un unique point situé entre \tilde{x}_i et \tilde{x}_{i+1} . On peut maintenant revenir au feuilletage singulier \mathcal{F} , et ceci nous donne la topologie de la feuille $\Pi(F_i)$: celle-ci coupe une et une seule fois la courbe γ ; puisque le feuilletage est non-récurrent, cette feuille joint donc les points 0 et ∞ .⁽²³⁾

Dans la section précédente, nous avons associé un mot de trois lettres à chaque composante de Reeb. En juxtaposant les mots des composantes de notre suite $(F_i, G_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, on trouve un mot infini. Dans ce mot, les flèches verticales viennent par paires, qui représentent l'orientation des feuilles "adjacentes" G_i et F_{i+1} . Cependant, puisque ces deux feuilles coupent le même arc de la décomposition, qui est transverse au feuilletage, le lemme 3.24 nous dit que chacune de ces paires est constituée de deux copies de la même flèche. Nous supprimons donc la flèche redondante, pour obtenir un nouveau mot infini \tilde{M} dans lequel les flèches verticales et horizontales alternent. Par périodicité de la suite de composantes, ce mot est de période $2d$, il induit donc un mot cyclique autorisé $M(\gamma) = (m_1 \cdots m_{2d})$ de longueur $2d$. On peut maintenant facilement vérifier qu'on obtient l'énoncé souhaité. Notons $(\Phi^t)_{t \in \mathbb{R}}$ un flot associé au feuilletage orienté \mathcal{F} .

Théorème 4.2. — *Le mot $M(\gamma)$ vérifie les propriétés suivantes. Pour tout entier i ,*

1. *la lettre m_{2i} est caractérisée par :*

$$- m_{2i} = \rightarrow \text{ si et seulement si pour tout } t > 0, \Phi^t(\gamma_{i-1}) \cap \gamma_i \neq \emptyset,$$

$$- m_{2i} = \leftarrow \text{ si et seulement si pour tout } t > 0, \gamma_{i-1} \cap \Phi^t(\gamma_i) \neq \emptyset.$$

2. *Le comportement de l'orbite $(\Phi^t(x_i))_{t \in \mathbb{R}}$ est fonction du mot $m_{2i-1} m_{2i} m_{2i+1}$ comme indiqué sur le tableau de la figure 14, section 2.c.⁽²⁴⁾*

⁽²³⁾ On pourrait ici retrouver l'absence de récurrence : supposons que $\Pi(F_i)$ a un point ω -limite $x \neq 0, \infty$; sachant que la feuille F_i va à l'infini, on obtient que tout relevé \tilde{x} est un point limite de la suite $(\tau^n(F_i))$. À l'aide d'un voisinage trivialisant de \tilde{x} , on trouve une transversale au feuilletage joignant deux relevés distincts de la feuille $\Pi(F_i)$. On en déduit que le module vaut 1. Cette remarque permet de voir facilement que tous les résultats de cette section se généralisent en remplaçant l'hypothèse "indice différent de 1" par l'hypothèse "module > 1 ".

⁽²⁴⁾ Dans le mot $M(\mathcal{F})$, les flèches verticales sont alternativement \uparrow et \downarrow : en effet, les deux flèches verticales d'un mot associé à une composante de Reeb sont de sens opposés. Pour les feuilletages, on utilise donc

De plus, le mot cyclique $M(\gamma)$ ne dépend pas du choix de la courbe de Jordan géodésique γ , ni de sa décomposition (à permutation circulaire des lettres près).

Vérifions simplement la seconde partie (l'indépendance des choix). Prenons une autre courbe de Jordan géodésique γ' , et considérons son relevé $\tilde{\gamma}'$. Puisque chaque feuille $\Pi(F_i)$ ou $\Pi(G_i)$ joint 0 à l'infini, il est clair que $\tilde{\gamma}'$ recoupe chacune de ces feuilles. Par conséquent, la suite de composantes de Reeb associée à γ' contient celle de γ . Mais puisque la \mathcal{F} -longueur de γ' est égale à celle de γ , elle ne peut pas en contenir d'autres. Les deux courbes engendrent donc la même suite de composantes de Reeb, et on a bien $M(\gamma') = M(\gamma)$.

Exemple. — La figure 23 illustre la construction précédente.

Exercice 4.3. — Écrire les définitions précises de module et d'indice par quarts-de-tour dans le cadre des feuilletages.

Exercice 4.4. — Montrer qu'on peut renforcer l'énoncé du théorème 4.2 en décrivant, à partir du mot $M(\gamma)$, la dynamique de toutes les feuilles rencontrant la courbe géodésique γ .

b. Calcul de l'indice de Poincaré-Hopf. — Il nous reste à montrer que l'indice de Poincaré-Hopf du feuilletage est relié à l'indice par quarts-de-tour, comme expliqué au paragraphe 2.d pour les homéomorphismes.

Nous définissons de la manière suivante l'indice de certains mots de trois flèches :

$$\text{Ind}(\uparrow \rightarrow \downarrow) := -\frac{1}{2}, \quad \text{Ind}(\uparrow \leftarrow \downarrow) = +\frac{1}{2}, \quad \text{Ind}(\downarrow \rightarrow \uparrow) = +\frac{1}{2}, \quad \text{Ind}(\downarrow \leftarrow \uparrow) = -\frac{1}{2}.$$

Autrement dit, l'indice de chacun de ces mot est le nombre algébrique de tours effectués par la lettre-flèche du mot. Nous voulons montrer que l'indice de Poincaré-Hopf de la singularité 0 du feuilletage \mathcal{F} est égal à la somme des indices de tous les mots de trois lettres centrés en une flèche horizontale qui apparaissent dans le mot $M(\mathcal{F})$, plus un :

Théorème 4.5. —

$$\text{Ind}(\mathcal{F}, 0) = \sum_{i=1}^d \text{Ind}(m_{2i-1}m_{2i}m_{2i+1}) + 1.$$

Démonstration. — Nous considérons à nouveau le feuilletage relevé $\tilde{\mathcal{F}} = \Pi^{-1}(\mathcal{F})$. Nous pouvons définir l'indice de $\tilde{\mathcal{F}}$ par rapport à l'automorphisme de revêtement τ comme l'indice de $\tilde{\mathcal{F}}$ le long d'une courbe joignant un point \tilde{x} un point $\tau(\tilde{x})$: en effet, ce nombre ne dépend pas du choix de la courbe, puisque c'est un entier (car $\tau(\tilde{\mathcal{F}}) = \tilde{\mathcal{F}}$) et l'espace des courbes utilisées est connexe. Ce nombre est noté $\text{Ind}(\tilde{\mathcal{F}}, \tau)$.

Lemme 4.6. — $\text{Ind}(\tilde{\mathcal{F}}, \tau) = \text{Ind}(\mathcal{F}, 0) - 1$.

Preuve du lemme. — Soit γ un cercle entourant 0, paramétré par $[0, 1]$. Alors le nombre de droite est variation totale de l'angle entre $\vec{V}(\gamma(t))$ et $\tilde{\gamma}'(t)$, et le nombre de gauche est la variation totale de l'angle entre $\Pi^{-1}(\vec{V}(\gamma(t)))$ et $\Pi^{-1}(\tilde{\gamma}'(t))$. Ces deux nombres coïncident pour tout t si on a choisi pour Π une application conforme (comme l'exponentielle complexe). \square

seulement les quatre dernières lignes du tableau. Ceci est une propriété spécifique aux feuilletages qui ne se généralise pas aux homéomorphismes, à cause de l'existence des secteurs indifférents.

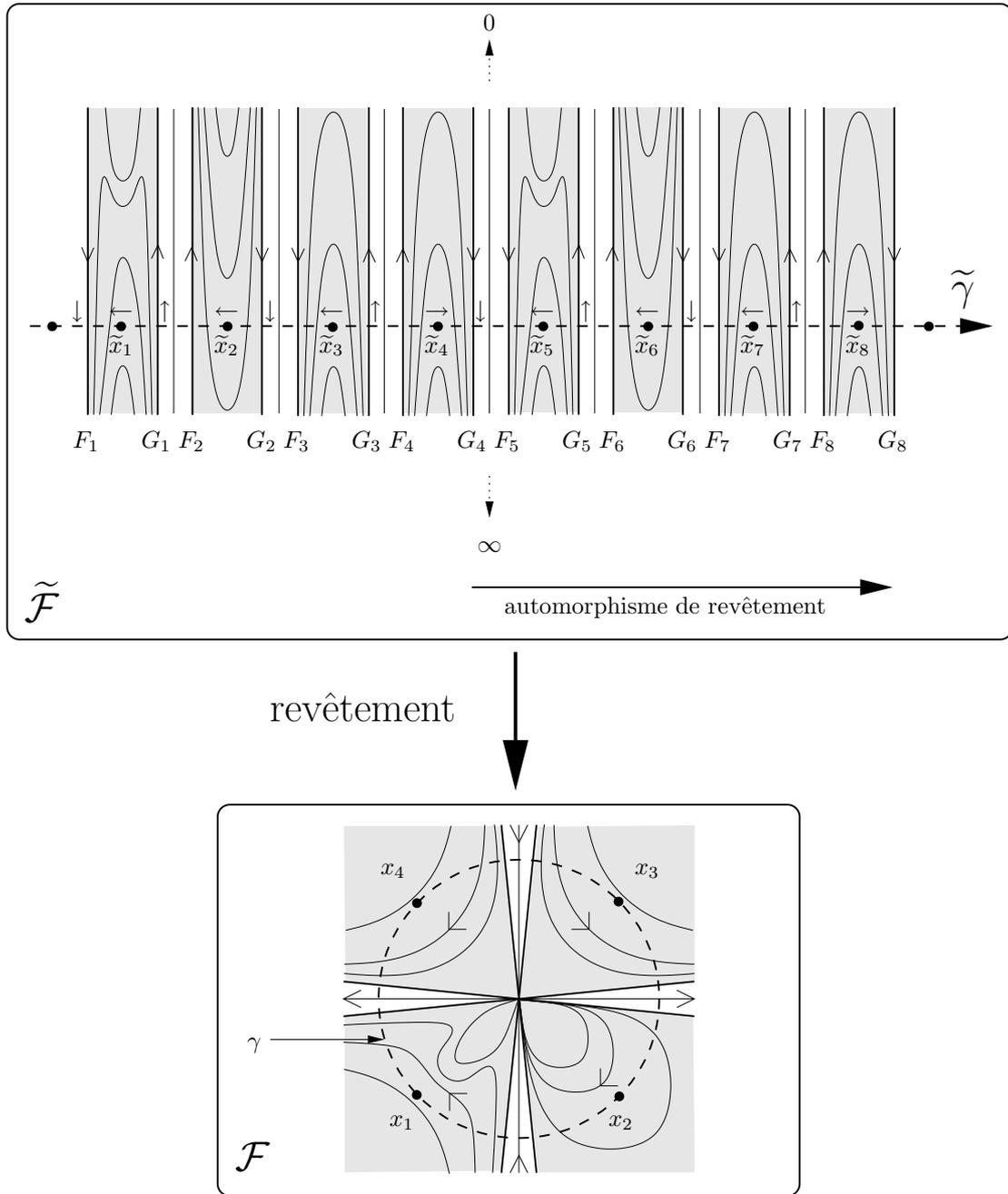


Figure 23. Un feuilletage \mathcal{F} du plan avec une singularité, et son relevé $\tilde{\mathcal{F}}$; le mot infini périodique M est écrit au-dessus de la droite géodésique $\tilde{\gamma}$; le mot cyclique $M(\mathcal{F})$ vaut $(\uparrow\leftarrow\downarrow\leftarrow\uparrow\rightarrow\downarrow\leftarrow)$, où la première flèche représente l'orientation de la séparatrice du bas.

Nous sommes donc ramenés à montrer la formule

$$\text{Ind}(\tilde{\mathcal{F}}, \tau) = \sum_{i=1}^d \text{Ind}(m_{2i-1}m_{2i}m_{2i+1}).$$

On reprend les objets et notations de la section précédente, courbe géodésique γ , relevé $\tilde{\gamma}$, et suite des composantes de Reeb de $\tilde{\mathcal{F}}$. D'après le théorème de Schoenflies-Homma (Appendice, théorème 6.2), on peut supposer que les feuilles F_i, G_i des composantes de Reeb sont des droites verticales, et que la courbe $\tilde{\gamma}$ est une droite horizontale (comme sur l'exemple de la figure 23). Dans cette situation, on peut définir l'indice du feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$ à l'intérieur d'une composante de Reeb (F_i, G_i) : c'est l'indice le long de n'importe quelle courbe allant de F_i à G_i . C'est un demi-entier que l'on note $\text{Ind}(\tilde{\mathcal{F}}, F_i, G_i)$. On définit de même les nombres $\text{Ind}(\tilde{\mathcal{F}}, G_i, F_{i+1})$, indice du feuilletage entre deux composantes de Reeb adjacentes.

Rappelons que le sous-arc de $\tilde{\gamma}$ qui va de G_i à F_{i+1} est transverse au feuilletage. On en déduit que l'indice entre deux composantes adjacentes est nul. Notre formule se réduit maintenant à un dernier lemme.

Lemme 4.7. — *Soit (F, G) une composante de Reeb d'un feuilletage du plan $\tilde{\mathcal{F}}$, et supposons que F et G sont deux droites parallèles. Alors l'indice du feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$ entre F et G est égal à l'indice du mot associé à la composante de Reeb (Δ_1, Δ_2) .*

Preuve du lemme. — Pour fixer les idées, on suppose que le mot associé à (F, G) est $(\uparrow \rightarrow \downarrow)$: G est à droite de F , F est à droite de G (lorsqu'on se met dans le sens de G), et la dynamique va de F vers G . Soit U un petit voisinage trivialisant d'un point de F , et V un petit voisinage trivialisant d'un point de G , de façon à ce que U et V soient disjoints. Par définition du mot associé, il existe un arc simple α , inclus dans une feuille, qui va de U à V . Dans ces conditions, la situation est homéomorphe au dessin de la figure 24. Soit γ le petit segment horizontal joignant F à l'extrémité

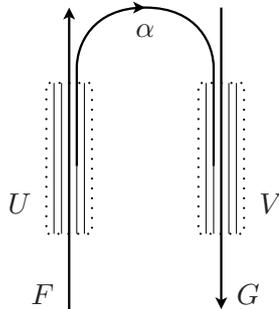


FIGURE 24. Calcul de l'indice à travers une composante de Reeb de type $(\uparrow \rightarrow \downarrow)$

$\alpha(0)$, et δ le petit segment horizontal joignant G à $\alpha(1)$. Il est clair que l'indice le long de la courbe $\gamma \cup \alpha \cup \delta$ représentée sur la figure est égal à $-1/2$. Ceci est aussi la valeur de l'indice du mot $(\uparrow \rightarrow \downarrow)$. Les trois autres cas sont similaires. \square

Ceci termine le calcul de l'indice. \square

Ce qui précède permet aussi d'obtenir le théorème suivant, qui explicite en quoi les feuilletages orientés du plan avec une seule singularité ressemblent aux feuilletages-modèles. Ce énoncé ne se généralise pas aux homéomorphismes!

Théorème. — Soit \mathcal{F} un feuilletage du plan avec pour seule singularité le point 0, d'indice différent de 1. Alors il existe un ouvert saturé O homéomorphe à $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, essentiel,⁽²⁵⁾ sur lequel le feuilletage est homéomorphe au feuilletage-modèle ayant le même indice par quarts-de-tour que \mathcal{F} .

Idée de preuve. — L'ouvert O est obtenu de manière très simple : il suffit de prendre une courbe de Jordan géodésique, de saturer par le feuilletage, et de prendre l'intérieur de cet ensemble (ce qui revient à enlever les feuilles tangentes à la courbe, c'est-à-dire celles qui passent par les sommets de la décomposition). Les détails sont laissés au lecteur (voir aussi les exercices 3.26 et 4.4). \square

c. Application : dynamique locale des feuilletages en indice > 1 . — Plaçons-nous à nouveau dans le cadre d'un feuilletage \mathcal{F} de l'anneau $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, et supposons cette fois-ci que l'indice de la singularité 0 est > 1 : nous écrivons $\text{Ind}(\mathcal{F}, 0) = 1 + p$ avec $p > 0$. D'après la formule d'indice (théorème 4.5), le mot $M(\mathcal{F})$ contient au moins $2p$ sous-mots de longueur 3 qui sont d'indice $+1/2$, c'est-à-dire égaux à $(\uparrow\leftarrow\downarrow)$ ou $(\downarrow\rightarrow\uparrow)$. D'après le théorème 4.2 et le tableau de la section 2.c, il existe donc au moins $2p$ feuilles du feuilletage qui vont de 0 à 0. En fait, on peut obtenir un résultat un peu plus précis.

Soit F une feuille qui va de 0 à 0, c'est-à-dire telle que $\text{Adhe}(F) = F \cup \{0\}$. Dans ce contexte, on appellera *pétale* la composante connexe bornée de $\mathbb{R}^2 \setminus \text{Adhe}(F)$. Il y a deux possibilités pour la feuille orientée \vec{F} , que l'on appelle directe ou indirecte, selon que la composante connexe bornée de $\mathbb{R}^2 \setminus \text{Adhe}(F)$ est à droite ou à gauche de \vec{F} .

Théorème 4.8. — Soit \mathcal{F} un feuilletage orienté de l'anneau $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, d'indice strictement supérieur à 1 ; on écrit $\text{Ind}(\mathcal{F}, 0) = 1 + p$ avec $p > 0$.

Alors on peut trouver une famille composée de p pétales directs et p pétales indirects, les pétales directs et indirects étant cycliquement alternés autour de 0. De plus, une telle famille de pétales existe dans tout voisinage U du point singulier 0.

Démonstration. — Nous commençons par montrer le résultat sans nous soucier de la dernière phrase. Considérons à nouveau la suite infinie de composantes de Reeb du revêtement construite dans les preuves précédentes, et projetons-là dans l'anneau ; on obtient ainsi une famille \mathcal{R}_0 de $2d$ composantes de Reeb dans l'anneau⁽²⁶⁾ cycliquement ordonnées autour de 0. À chacune de ces composantes correspond un sous-mot de longueur 3 dans le mot $M(\mathcal{F})$, et il s'agit d'extraire de cette famille une sous-famille constituée de $2p$ composantes, dont les mots correspondant sont alternativement $(\uparrow\leftarrow\downarrow)$ et $(\downarrow\rightarrow\uparrow)$. On est ainsi ramené à un problème purement combinatoire portant sur le mot $M_0 = M(\mathcal{F})$, que l'on peut résoudre de la manière suivante.

1. Ou bien toutes les composantes de Reeb de la famille \mathcal{R}_0 sont de l'un des deux types recherchés ; dans ce cas les deux types directs et indirects doivent nécessairement alterner, et la formule d'indice (théorème 4.5) devient

$$1 + p = d \times \left(+\frac{1}{2} \right) + 1$$

⁽²⁵⁾C'est-à-dire séparant 0 et l'infini, ou encore tel que l'inclusion induise un isomorphisme pour les groupes fondamentaux.

⁽²⁶⁾Notion qui resterait à définir précisément...

ce qui nous dit que le nombre d de composantes est égal à $2p$, comme on voulait.

2. Ou bien il y a des “mauvaises composantes”, d’indice $-1/2$; mais alors, toujours d’après la formule d’indice, il doit aussi y en avoir des “bonnes” (d’indice $+1/2$). On choisit alors deux composantes adjacentes qui sont l’une bonne, l’autre mauvaise, et on les retire simultanément de la famille; on modifie également le mot M de façon concordante. On obtient ainsi une sous-famille de composantes de Reeb \mathcal{R}_1 , et un sous-mot M_1 qui vérifie encore la formule d’indice. On itère alors le procédé d’extraction jusqu’à épuisement des mauvaises composantes, où l’on est ramené au premier cas.

Il reste à montrer que notre famille de pétales peut être trouvée dans tout voisinage de 0. Ceci est très facile, voici pourquoi. Soit U un disque ouvert centré en 0. Le feuilletage \mathcal{F} induit un feuilletage \mathcal{F}_U sur l’ouvert $U \setminus \{0\}$: il suffit de considérer la partition de $U \setminus \{0\}$ par les composantes connexes des ensembles du type $F \cap U$, où F est une feuille de \mathcal{F} . Puisque U est homéomorphe au plan, on peut considérer à nouveau \mathcal{F}_U comme un feuilletage de l’anneau $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. L’indice de Poincaré-Hopf de ce nouveau feuilletage est clairement égal à l’indice de l’ancien feuilletage. Ce qui précède (le théorème sans sa dernière phrase) permet de trouver une famille de pétales pour le nouveau feuilletage \mathcal{F}_U , autrement dit une famille de pétales pour \mathcal{F} incluse dans U . \square

d. Composantes de Reeb des homéomorphismes. — En ce qui concerne les homéomorphismes, la construction de l’indice par quarts-de-tour et la preuve des théorèmes 2.8 et 2.9 suit globalement la même stratégie que celle que nous avons décrite pour les feuilletages orientés, avec beaucoup de complications techniques. Donnons-en une idée. En passant au revêtement universel, on se ramène à étudier les homéomorphismes du plan préservant l’orientation et sans point fixe, qu’on appelle *homéomorphismes de Brouwer*. Soit h un tel homéomorphisme. On définit la distance d_h sur le plan : $d_h(x, y)$ est le nombre minimum d’arcs libres (*i. e.* disjoints de leur image) qu’il faut pour relier x à y . On peut définir une notion de composante de Reeb qui généralise celle des feuilletages. Le théorème d’existence correspondant est une étape essentielle de la construction de l’indice par quarts-de-tour.

Théorème. — Soient x et y deux points du plan, et $d = d_h(x, y)$. Alors il existe exactement $d - 1$ composantes de Reeb séparant (x, y) qui sont minimales pour l’inclusion.

Comment définir les composantes de Reeb pour les homéomorphismes? Comme pour les feuilletages, on peut montrer que l’espace \mathbb{R}^2/h des orbites de h est localement homéomorphe au plan : c’est une variété de dimension 2 *non séparée*. On appelle *ensemble singulier* de h , et on note $\text{Sing}(h)$, l’ensemble des couples de points (x, y) dont les orbites ne sont pas séparées dans l’espace quotient, et pour lequel la dynamique “va de x vers y ”. La définition est alors la suivante.

Définition. — Soient x et y deux points, et F et G deux sous-ensembles fermés connexes du plan. On dit que (F, G) est une *composante de Reeb pour (x, y)* si :

1. $F \times G \subset \text{Sing}(h)$ ou $G \times F \subset \text{Sing}(h)$;
2. F contient x , ou bien F sépare x et $G \cup \{y\}$;
3. G contient y , ou bien G sépare y et $F \cup \{x\}$.

La preuve du théorème passe notamment par l'étude des ensembles obtenus comme limite de la suite des itérés d'un petit disque.

Exercice 4.9. — Montrer que l'espace des orbites d'un homéomorphisme de Brouwer est une variété de dimension 2. Aide : utiliser le corollaire 1.6 du texte de M. Bonino ([**Bon06**]).

5. Feuilletages en droites de Brouwer

Dans cette section, nous revenons à l'étude de la dynamique d'un homéomorphisme du plan, ayant un unique point fixe, dont l'indice est différent de 1. Nous appliquons le théorème feuilleté de P. Le Calvez, qui nous donne l'existence d'un feuilletage de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ "transverse à la dynamique". Dans cette situation, nous allons voir que ce feuilletage possède des propriétés supplémentaires ; en particulier, l'indice de Poincaré-Hopf de la singularité 0 sera égal à l'indice de Poincaré-Lefschetz du point fixe de h . Nous pourrions donc appliquer les résultats de la section précédente sur la structure des feuilletages en indice différent de 1. En particulier, si l'indice est > 1 , la famille de pétales directs et indirects du feuilletage devient une famille de pétales attractifs et répulsifs pour h .

a. Droites de Brouwer dans la sphère. — Pour cette section, il est plus naturel de se placer sur la sphère $\mathbb{S}^2 \simeq \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$. On considère un homéomorphisme de la sphère \mathbb{S}^2 , préservant l'orientation. On note $\text{Fixe}(h)$ l'ensemble des points fixes de h ; par la suite, nous serons surtout intéressés par le cas où h possède exactement deux points fixes, mais nous commençons par donner des définitions générales.

Considérons une courbe $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^2$. Cette courbe est dite *propre* (sous entendu dans la sphère $\mathbb{S}^2 \setminus \text{Fixe}(h)$) si

- son intérieur $\gamma(]0, 1[)$ évite les points fixes de h ;
- ses extrémités $\gamma(0), \gamma(1)$ sont des points fixes de h .

Une courbe définie sur $]0, 1[$ sera dite propre si elle se prolonge à $[0, 1]$ en une courbe propre. Par exemple, une feuille d'un feuilletage du plan avec une singularité d'indice différent de 1 est une courbe propre (voir la section précédente).

Dans notre contexte, on peut définir deux types de droites⁽²⁷⁾ de Brouwer : celles qui vont d'un point fixe à lui-même (courbes de Jordan propres) et celle qui vont d'un point fixe à un autre (arcs simples propres). Considérons tout d'abord une courbe de Jordan propre γ . Supposons que la courbe $\Delta = \gamma(]0, 1[)$ est disjointe de son image. La courbe γ borde deux disques topologiques fermés⁽²⁸⁾, appelons P celui des deux qui contient $h(\gamma)$. Nous dirons que la courbe Δ est une droite de Brouwer si ce disque est un attracteur strict, c'est-à-dire si $h(P) \subset \text{Int}(P) \cup \text{Fixe}(h)$. Ceci revient à demander que Δ soit disjointe de son image, et que γ sépare $h^{-1}(\Delta)$ et $h(\Delta)$ (figure 25). Le disque P est alors appelé *pétale attractif* associé à la droite de Brouwer Δ . Dans cette situation il est clair que Δ est

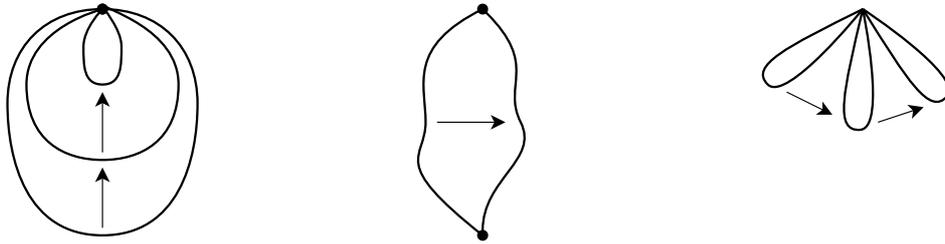


FIGURE 25. Deux vraies droites de Brouwer, et une fausse

disjointe de tous ses itérés $h^n(\Delta)$, et on peut montrer que le domaine balayé par Δ et ses

⁽²⁷⁾La dénomination vient du cadre des homéomorphismes du plan.

⁽²⁸⁾Ensembles homéomorphes au disque unité fermé.

itérés forme un *domaine de translation*, c'est-à-dire un ouvert sur lequel la dynamique est conjuguée à une translation du plan (nous n'utiliserons pas ceci).

On considère maintenant un arc simple propre γ . Nous dirons que la courbe $\Delta = \gamma(]0, 1[)$ est une droite de Brouwer si elle est disjointe de son image. Ici il n'y a pas de condition de séparation ; *en l'absence de courbe d'indice 1*, on pourrait montrer, comme dans l'autre cas, que Δ est disjointe de tous ses itérés et engendre un domaine de translation.

Lorsque Δ est une droite de Brouwer du premier type, on peut orienter Δ de manière à ce que $h(\Delta)$ soit située sur sa droite ; on obtient alors une *droite de Brouwer orientée* notée $\vec{\Delta}$. En l'absence de courbe d'indice 1, on peut également définir les droites de Brouwer orientées du second type (nous n'utiliserons pas l'orientation de ces droites).

Exercice 5.1. — Trouver une “fausse droite de Brouwer” pour la translation vue dans la sphère (figure 3), c'est-à-dire une courbe de Jordan γ telle que $\gamma \cap h(\gamma) = \{\infty\}$ mais qui ne vérifie pas la condition de séparation.

b. Application du théorème feuilleté de Patrice Le Calvez. — On suppose désormais que l'homéomorphisme h a exactement deux points fixes, notés 0 et ∞ .

On considère la restriction de h à l'anneau complémentaire des points fixes, et on note H un relevé⁽²⁹⁾ au revêtement universel. Bien sûr, H n'a pas de point fixe ; on est donc dans le cadre du théorème général de P. Le Calvez, dont voici un énoncé restreint à notre situation (voir [LeC05, LeC06]).

Théorème. — Soit h un homéomorphisme de l'anneau $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ isotope à l'identité. Soit H un relevé de h au revêtement universel. Supposons que H n'a pas de point fixe. Alors il existe un feuilletage orienté \mathcal{F} de l'anneau dont le relevé $\tilde{\mathcal{F}}$ au revêtement universel est un feuilletage orienté du plan en droites de Brouwer orientées de H .

En fait, dans notre cadre très simple, on peut obtenir un résultat plus fort : on va voir que si l'on applique le théorème à un bon relevé H_0 (le “relevé canonique”), on obtient des droites de Brouwer non seulement pour le relevé H_0 , mais aussi pour l'homéomorphisme h .

Théorème 5.2. — Soit h un homéomorphisme de la sphère \mathbb{S}^2 préservant l'orientation, fixant uniquement les points 0 et ∞ . Supposons que l'indice de 0 est différent de 1.

Alors il existe un feuilletage orienté \mathcal{F} sur l'anneau $\mathbb{S}^2 \setminus \{0, \infty\}$ tel que

1. les feuilles de \mathcal{F} sont des courbes propres ;
2. les feuilles orientées de \mathcal{F} sont des droites de Brouwer orientées pour h ;
3. l'indice de Poincaré-Hopf du feuilletage au point 0 est égal à l'indice de Poincaré-Lefschetz de h au point 0.

Si l'on ne veut pas utiliser l'orientation des droites de Brouwer du second type, on peut restreindre l'énoncé en remplaçant la seconde propriété par :

⁽²⁹⁾C'est-à-dire un homéomorphisme du plan tel que $\Pi \circ H = h \circ \Pi$.

2bis. les feuilles orientées de \mathcal{F} qui vont de 0 à 0 ou de ∞ à ∞ sont des droites de Brouwer orientées pour h .

Le corollaire décrit plus bas utilise seulement cet énoncé plus faible.

Exemple. — Voici un exemple très simple. On considère (encore!) l'homéomorphisme linéaire hyperbolique selle

$$h(x, y) = (2x, y/2).$$

En rajoutant le point à l'infini, on voit h comme un homéomorphisme de la sphère \mathbb{S}^2 ayant deux points fixes : le point 0 est d'indice -1 et le point ∞ est d'indice 3 (voir par exemple la figure 6). Cet homéomorphisme est engendré par un flot : on a par exemple $h = \Phi^{\log(2)}$ où (Φ^t) est le flot défini par $\Phi^t(x, y) = (e^t x, e^{-t} y)$; le feuilletage dessiné sur la figure 6 n'est rien d'autre que le feuilletage par les orbites de ce flot. On obtient alors un feuilletage \mathcal{F}_0 en droites de Brouwer sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ en prenant par exemple le feuilletage orthogonal au feuilletage par les orbites de Φ (figure 26, milieu).

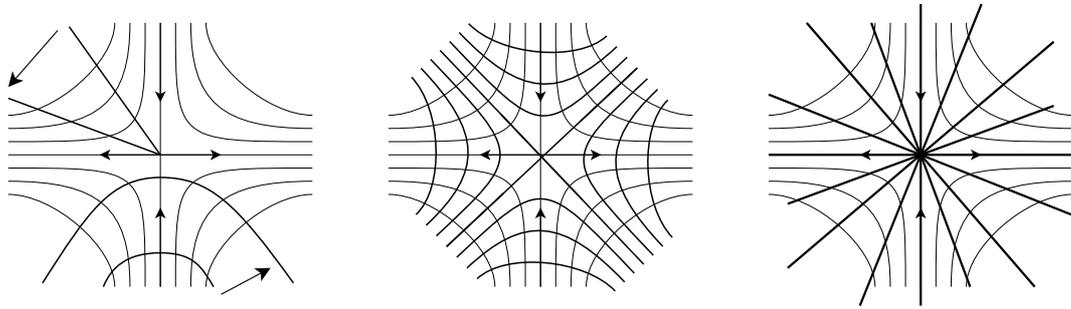


FIGURE 26. Deux droites de Brouwer, un bon et un mauvais feuilletage pour l'application selle

Quels sont les relevés de h au revêtement universel de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$? Commençons par dessiner le relevé du feuilletage par les orbites du flot Φ , comme sur la figure 27. Il existe

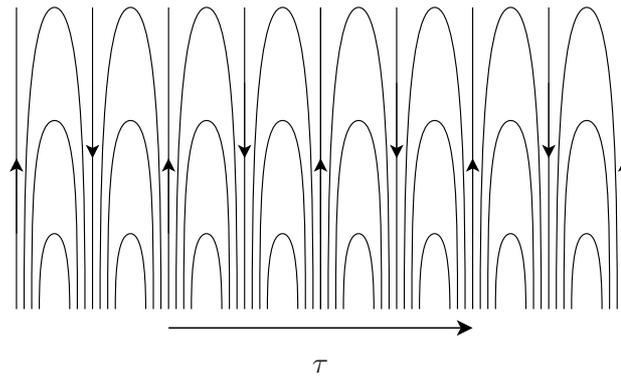


FIGURE 27. Le relevé canonique H_0 ; toute droite verticale est une droite de Brouwer pour $\tau \circ H_0$.

alors un unique relevé H_0 de h qui préserve chaque feuille du feuilletage dessiné sur cette figure. Ce relevé est appelé *relevé canonique* de h . Le feuilletage \mathcal{F}_0 pourrait être celui donné par le théorème de P. Le Calvez appliqué au relevé H_0 : en effet, le relevé $\tilde{\mathcal{F}}_0$ de

ce feuilletage est transverse aux orbites de Φ , c'est donc bien un feuilletage en droites de Brouwer pour H_0 .

Les autres relevés de h sont les homéomorphismes

$$H_k = \tau^k \circ H_0 = H_0 \circ \tau^k,$$

où τ est l'automorphisme du revêtement universel, et k un entier quelconque. Que se passe-t-il si on applique le théorème de P. Le Calvez à ces "mauvais" relevés H_k avec $k \neq 0$? On voit facilement que toute droite verticale est une droite de Brouwer pour H_k . Le feuilletage \mathcal{F} donné par le théorème pourrait donc être le feuilletage en demi-droites issues de 0, dont le relevé est le feuilletage en droites verticales (figure 26, droite). Ce n'est pas un feuilletage en droites de Brouwer pour h : en effet, les quatre demi-axes ne sont pas des droites de Brouwer, ils sont invariants par h . On peut remarquer que l'indice du bon feuilletage est bien égal à -1 , alors que l'indice du mauvais feuilletage vaut 1. ⁽³⁰⁾

c. Conséquences. — Dans le chapitre précédent, nous avons étudié la structure des feuilletages qui sont donnés par le théorème. En particulier, nous avons montré l'existence de feuilles du feuilletage contenues dans un voisinage arbitrairement petit de l'un des points fixes. Ceci va nous donner des renseignements sur la dynamique locale de h , à travers l'existence de *pétales*. Nous arrivons ainsi à un énoncé de dynamique topologique qui explique pourquoi il ne peut pas y avoir de bonne mesure préservée lorsque l'indice est > 1 (relire l'introduction...).

Si h est un homéomorphisme du plan fixant 0, un *pétale attractif* pour h est un disque topologique fermé P dont le bord contient 0, vérifiant $h(P) \subset \text{Int}(P) \cup \{0\}$. Un *pétale répulsif* est un pétale attractif pour h^{-1} .

Rappelons que le théorème de Leau-Fatou (section 1) décrit la dynamique au voisinage de 0 d'une application holomorphe du type $f(w) = w + \alpha w^{p+1} + \dots$. En fait, l'énoncé d'origine se contentait de donner une description en termes de pétales attractifs et répulsifs (voir figure 4); la version *a priori* plus forte donnée dans la section 1, qui dit que f est localement topologiquement conjuguée à $w + w^{p+1}$, en est un corollaire facile. Le résultat qui suit peut être vu comme une version topologique de la formulation initiale de Leau et Fatou.

Corollaire 5.3 (version topologique du théorème de Leau-Fatou)

Soit h un homéomorphisme du plan préservant l'orientation, fixant uniquement 0, d'indice strictement supérieur à 1; on écrit $\text{Ind}(h, 0) = 1 + p$ avec $p > 0$.

Alors il existe p pétales attractifs et p pétales répulsifs deux à deux d'intersection égale à $\{0\}$, les pétales attractifs et répulsifs étant cycliquement alternés autour de 0. De plus, une telle famille de pétales existe dans tout voisinage U du point fixe 0.

La dernière phrase de l'énoncé est importante, puisqu'elle dit que ce résultat est un résultat local; en particulier, à l'aide du théorème d'extension, il reste valable pour les points fixes isolés d'indice > 1 sur une surface quelconque. Ce corollaire est illustré par la figure 28.

⁽³⁰⁾L'indice d'un feuilletage associé, *via* le théorème de P. Le Calvez, à un relevé autre que le relevé canonique est toujours égal à 1.

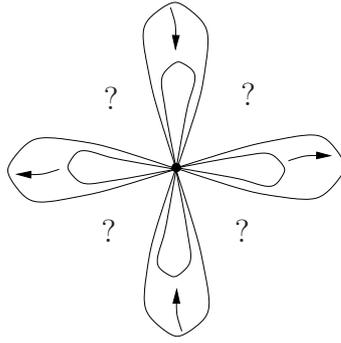


FIGURE 28. Dynamique autour d'un point fixe d'indice plus grand que 1 (ici d'indice 3)

Preuve du corollaire 5.3. — On applique d'abord le théorème 5.2, qui nous fournit un feuilletage de l'anneau $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ en droites de Brouwer orientées pour h , qui a le même indice que h . On applique maintenant le théorème 4.8 d'existence des pétales pour les feuilletages. D'après la définition des droites de Brouwer orientées, un pétale direct pour le feuilletage correspond à un pétale attractif pour h . On obtient donc le résultat. \square

Si P est un pétale attractif, l'aire de $h(P)$ est strictement plus petite que l'aire de P . Autrement dit, les pétales ne peuvent pas exister pour un homéomorphisme qui préserve l'aire. On obtient ainsi le résultat annoncé en introduction comme conséquence de l'existence des pétales.

Corollaire 5.4 (Pelikan-Slaminka ([PS87]), version topologique du théorème de Simon et Nikishin ([Sim74, Nik74]))

Les points fixes isolés d'un homéomorphisme de surface préservant l'aire et l'orientation ont un indice inférieur ou égal à 1.

Exercice 5.5. — Dessiner un exemple avec un pétale attractif P dont l'attracteur

$$\bigcap_{n \geq 0} h^n(P)$$

n'est pas réduit au point fixe (aide : regarder la figure 11). Un tel pétale est dit *singulier*. Dans le cas holomorphe, tous les pétales sont réguliers. Dessiner un autre exemple pour lequel aucun voisinage de 0 n'est recouvert pas une réunion de pétales attractifs et répulsifs (là encore, contrairement au cas holomorphe). Plus difficile : donner un exemple pour lequel tous les pétales sont singuliers.

d. Relevé canonique. — La preuve du théorème 5.2 repose sur l'existence d'un bon relevé. Commençons par définir l'indice d'un relevé H de h par rapport à l'automorphisme de revêtement τ , comme nous l'avons fait pour les feuilletages pour la preuve du théorème 4.5 : c'est l'indice du champ de vecteur $xH(x)$ le long de n'importe quelle courbe joignant un point x_0 à $\tau(x_0)$; on le note $\text{Ind}(H, \tau)$.

Lemme 5.6 (admis, voir [LeR04], proposition 4.17). — *Sous les hypothèses du théorème 5.2, il existe un relevé H_0 de $h|_{\mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\}}$ au revêtement universel \mathbb{R}^2 ayant les propriétés suivantes :*

1. *tout arc simple $\tilde{\gamma}$ de \mathbb{R}^2 qui est libre⁽³¹⁾ pour H_0 se projette sur $\mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\}$ en un arc simple γ qui est libre pour h ;*
2. *on a l'égalité*

$$\text{Ind}(H_0, \tau) = \text{Ind}(h, 0) - 1.$$

De plus, l'une ou l'autre de ces propriétés caractérise le relevé H_0 .

Nous n'utiliserons pas la partie "unicité" du lemme.

e. Idée de la preuve du théorème 5.2. — Dans cette partie, nous expliquons comment démontrer l'existence du feuilletage en droites de Brouwer à l'aide du théorème de P. Le Calvez et du relevé canonique.

Soit H_0 le relevé canonique de h fourni par le lemme 5.6. Soit \mathcal{F}_0 un feuilletage de $\mathbb{S}^2 \setminus \{0, \infty\}$ vérifiant les conclusions du théorème de P. Le Calvez pour H_0 . On montre d'abord que le feuilletage est non-récurrent, puis que les feuilles sont des droites de Brouwer pour h , et enfin l'égalité des indices. Une des difficultés est qu'on ne sait pas, avant la dernière étape, que l'indice du feuilletage \mathcal{F}_0 est différent de 1. Pour simplifier, on suppose que \mathcal{F}_0 est de classe C^1 .

1. *Le feuilletage \mathcal{F} est non récurrent.* — Soit Φ un flot engendrant le feuilletage \mathcal{F}_0 , on note $\omega(x)$ l'ensemble ω -limite d'un point x : il s'agit de l'ensemble des valeurs d'adhérence de la courbe $\Phi^t(x)$, pour un point x de F , lorsque t tend vers $+\infty$. On définit de même $\alpha(x)$ en changeant $+\infty$ en $-\infty$. Nous voulons montrer que tous les ensembles $\omega(x)$ sont réduits à 0 ou ∞ . Commençons par un lemme général de la théorie de Poincaré-Bendixson.

Lemme 5.7. — *Soit \mathcal{F} un feuilletage orienté de l'anneau $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Soit x un point de l'anneau, y un point de $\omega(x)$. Alors $\omega(y) \subset \{0, \infty\}$.*

Exercice 5.8. — Démontrer le lemme. Aide : en supposant que $\omega(y)$ contient un point $z \neq 0, \infty$, utiliser une carte U du feuilletage en z et un morceau γ_1 de l'orbite de y pour construire un disque topologique attractif pour Φ qui piège l'orbite de x , et qui ne contient pas le point y (voir aussi la figure 18).

Soit maintenant x un point de l'anneau, et supposons que $\omega(x)$ contient un point $y \neq 0, \infty$. On a alors, une fois de plus, le dessin de la figure 18. D'autre part, nous savons que ce dessin n'arrive pas pour le feuilletage relevé $\tilde{\mathcal{F}}$ (c'est le théorème de Poincaré-Bendixson classique). C'est donc que la courbe de Jordan $\gamma_1 \cup \gamma_2$ ne se relève pas en une courbe de Jordan, c'est-à-dire qu'elle entoure le point 0. D'autre part, l'ensemble $\omega(x)$ est inclus dans le disque bordé par $\gamma_1 \cup \gamma_2$. D'après le lemme précédent, et puisque ce disque est attractif pour Φ , on a $\alpha(y) = \omega(y) = \{0\}$. L'ensemble $\omega(x)$ est donc une réunion de bord de pétales directs ou indirects de \mathcal{F} . On montre que l'accumulation de la feuille de x force tous ces pétales à être du même type, direct ou indirect. Pour fixer les idées, nous supposons qu'ils sont tous directs.

Soit F_y la feuille en y , et P le pétale direct qu'elle borde. Choisissons un relevé \tilde{P} de P . Puisque les feuilles de $\tilde{\mathcal{F}}$ sont des droites de Brouwer pour H_0 , \tilde{P} est attractif pour H_0 ; on

⁽³¹⁾Rappelons que *libre* signifie *disjoint de son image*.

en déduit immédiatement que P est attractif pour h . En notant A la réunion de tous les pétales bordés par les feuilles de $\omega(x)$, on a donc $h(A) \subset \text{Int}(A) \cup \{0\}$.

En particulier, y n'appartient pas à $h(\omega(x))$ ni à $h^{-1}(\omega(x))$. On peut donc choisir un ouvert trivialisant U en y assez petit pour être encore disjoint de $h(\omega(x))$ et de $h^{-1}(\omega(x))$. On peut alors choisir un morceau γ_1 de la feuille de x suffisamment proche de $\omega(x)$ pour que U soit encore disjoint de $h(\gamma_1)$ et de $h^{-1}(\gamma_1)$. On referme maintenant γ_1 à l'aide d'un arc $\gamma_2 \subset U$ de façon à obtenir une courbe de Jordan. Cette courbe entoure le point fixe 0, et elle a été construite de façon à être disjointe de son image par h . On en déduit qu'elle borde un attracteur, et que le point fixe 0 de h est d'indice 1 (voir l'exercice 1.4). Ceci contredit nos hypothèses.

2. Les feuilles sont des droites de Brouwer. — Les feuilles de F sont libres : ceci suit de la propriété 1 du relevé canonique. Pour la propriété de séparation des droites de Brouwer dont l'adhérence est une courbe de Jordan, il s'agit de montrer qu'elles bordent un pétale attractif, ce qui a été fait dans le paragraphe précédent.

3. Les indices coïncident. — La deuxième propriété du relevé canonique, et la propriété analogue pour le feuilletage relevé $\tilde{\mathcal{F}}$ (lemme 4.6), nous permettent de faire le calcul au revêtement universel : il s'agit donc de montrer que

$$\text{Ind}(\tilde{\mathcal{F}}, \tau) = \text{Ind}(H_0, \tau).$$

Nous expliquons seulement les étapes de ce calcul. On commence par montrer que le module du feuilletage \mathcal{F} est > 1 . On peut alors reprendre toutes les constructions de la section 4 (voir la note de bas de page numéro 23) : courbe géodésique et composantes de Reeb. En particulier, on a la formule du théorème 4.5 : l'indice du feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$ est égal à la somme des indices des mots associés aux composantes de Reeb. Il reste donc à vérifier que $\text{Ind}(H_0, \tau)$ vérifie la même formule.

On procède comme pour $\tilde{\mathcal{F}}$: on se place dans la situation où les composantes de Reeb sont des droites verticales et la courbe géodésique $\tilde{\gamma}$ est une droite horizontale ; et on va séparer le calcul entre deux composantes de Reeb adjacentes et le calcul à l'intérieur d'une composante de Reeb. Pour poursuivre l'analogie avec le calcul de $\text{Ind}(\tilde{\mathcal{F}}, \tau)$, nous devons maintenant définir l'indice partiel de H_0 entre les deux droites F_i et G_i . C'est un peu plus délicat ici : en effet, même dans cette situation, l'indice \mathcal{I} de H_0 le long d'une courbe reliant les deux droites n'a aucune raison d'être un demi-entier. Cependant, puisque F_i et G_i sont des droites de Brouwer orientées dans des sens opposés, la bande qu'elles bordent est un attracteur ou un répulseur ; on en déduit que ce nombre n'est jamais un entier (faire un dessin !). On peut donc définir $\text{Ind}(H_0, F_i, G_i)$ comme le demi-entier le plus proche de \mathcal{I} .

Il reste à calculer ces indices partiels. Indiquons simplement que dans le cas où le mot associé à la composante de Reeb (F_i, G_i) vaut $(\uparrow \rightarrow \downarrow)$, on utilise à nouveau le dessin de la figure 24 : l'ouvert à droite de la feuille α est attractif pour H_0 , et on en déduit que l'indice de H_0 le long de $\gamma \cup \alpha \cup \delta$ vaut $-1/2 + \varepsilon$ avec $\varepsilon < 1/2$.

Expliquons, pour finir, pourquoi le module du feuilletage ne pouvait pas être égal à 1. Par définition, il existerait alors une courbe de Jordan γ qui est transverse au feuilletage, sauf peut-être en un point ; en utilisant l'orientation du feuilletage on voit qu'elle doit être transverse partout. L'orientation empêche aussi une feuille de couper γ en plus qu'un point ; ainsi, chaque feuille qui coupe γ doit aller de 0 à l'infini (ou de l'infini à 0). On

choisit une telle feuille F . On se place dans la situation où F est une demi-droite issue de 0, et γ est un cercle centré en 0. Soit \tilde{F} un relevé de F : c'est une droite verticale. Soit x le point de $\tilde{F} \cap \tilde{\gamma}$; nous allons voir que l'indice de H_0 le long du segment $[x\tau(x)] \subset \tilde{\gamma}$ est nul.

Supposons par exemple que \tilde{F} est orientée vers le haut, c'est-à-dire que $H_0(\tilde{F})$ est à droite de \tilde{F} . Soit $y \in [x\tau(x)]$. La remarque-clé est que *le point $H_0(y)$ ne peut pas être situé sur la demi-horizontale à gauche de y* . Ceci vient du fait que y est sur une droite de Brouwer F_y , orientée vers le haut, et qui ne coupe la droite horizontale $\tilde{\gamma}$ qu'au point y .

Puisqu'une application $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ qui n'est pas surjective est de degré nul, on en déduit que $\text{Ind}(H_0, \tau) = 0$. L'indice $\text{Ind}(h, 0)$ vaut 1, ce qui est exclu.

APPENDICE

6. Théorèmes de Schoenflies-Homma

Le théorème de Schoenflies est l'un des outils techniques les plus couramment utilisés dans les problèmes de topologie plane. Dans ce texte, nous appliquons un certain nombre de variantes qui peuvent toutes être vues comme des corollaires d'un théorème de Homma. Dans cet appendice, nous énonçons le théorème de Homma et expliquons quelques-unes de ses utilisations.

a. Le théorème de Schoenflies. —

Théorème 6.1 (Schoenflies). — *Tout homéomorphisme entre deux courbes de Jordan incluses dans \mathbb{S}^2 , ou entre deux arcs simples inclus dans \mathbb{S}^2 , s'étend en un homéomorphisme de \mathbb{S}^2 .*

b. Le théorème de Schoenflies-Homma. —

Définition ([Hom53]). — On appelle *ensemble en forme de « Y »* un ensemble qui est la réunion de trois arcs simples ayant en commun un seul point, extrémité de chacun d'eux.

L'orientation de la sphère induit un ordre cyclique sur l'ensemble des trois arcs qui constituent n'importe quel ensemble de ce type, au voisinage du point d'intersection.

Théorème 6.2 (Homma). — *Soit F un ensemble compact, connexe et localement connexe de la sphère. Une application continue et injective de F dans la sphère s'étend en un homéomorphisme de la sphère préservant l'orientation si et seulement si elle préserve l'ordre cyclique de tous les ensembles en forme de « Y » contenus dans F .*

c. Utilisations. — Dans ce cours on utilise le théorème avec divers ensembles F , ces ensembles étant à chaque fois des graphes simpliciaux finis. Les détails sont laissés au lecteur. Voici deux situations possibles.

- Dans le cas où F est une courbe fermée simple ou bien un arc, F ne contient aucun ensemble en forme de « Y », et on retrouve en particulier le théorème de Schoenflies.
- Soient $\Delta_1, \dots, \Delta_k$ ($k \geq 2$), une famille de droites topologiques du plan⁽³²⁾, deux à deux disjointes. Supposons que pour tout $0 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq k$, la droite Δ_{i_2} sépare Δ_{i_1} de Δ_{i_3} . Alors il existe un homéomorphisme h du plan, préservant l'orientation, qui envoie chacune des droites Δ_i sur la droite verticale $i \times \mathbb{R}$.

En effet, on peut d'abord définir h en restriction à la réunion des droites considérées.

On vérifie ensuite que h préserve l'ordre cyclique au voisinage du point ∞ , ce qui est donné par l'hypothèse de séparation. On applique alors le théorème de Homma.

Remarquons que dans beaucoup de cas, on a besoin de spécifier l'image d'un certain nombre de points par l'homéomorphisme recherché ; ceci arrive en particulier quand on veut obtenir un homéomorphisme du plan, c'est-à-dire qui fixe le point à l'infini. Ceci ne

⁽³²⁾Une *droite topologique* est une courbe Γ paramétrée par \mathbb{R} et qui “va à l'infini dans les deux sens” : pour tout compact K du plan il existe $M > 0$ tel que $\Gamma(\mathbb{R} \setminus [-M, M])$ évite K . D'après Poincaré-Bendixson, toute feuille d'un feuilletage du plan sans singularité est une droite topologique.

pose pas de problème (typiquement, on utilise que le groupe des homéomorphismes du disque qui fixent chaque point du bord est transitif).

Références

- [Arn] V. Arnol'd. *Arnold's problems*. Springer-Verlag, PHASIS, 2004.
- [Bon06] M. Bonino. *Around Brouwer theory of fixed point free planar homeomorphisms*. Notes de cours de l'école d'été, Grenoble, juin 2006.
- [BST88] M. Brown, E. Slaminka, W. Transue. An orientation preserving fixed point free homeomorphism of the plane which admits no closed invariant line. *Topology Appl.* **29** (1988), no. 3, 213–217.
- [Cro06] S. Crovisier. *Exotic rotations*. Notes de cours de l'école d'été, Grenoble, juin 2006.
- [GR66] C. Godbillon, G. Reeb. Fibrés sur le branchement simple. *Enseignement Math.* (2) **12** 1966 277–287.
- [HR57] A. Haefliger, G. Reeb. Variétés (non séparées) à une dimension et structures feuilletées du plan. *Enseignement Math.* (2) **3** (1957), 107–125.
- [Ham54] O. H. Hamilton. A short proof of the Cartwright-Littlewood theorem. *Can. J. of Math.* **6** (1954), 522–524.
- [Hat] A. Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, 2002 et www.math.cornell.edu/hatcher/AT/ATpage.html.
- [HH86] G. Hector, U. Hirsch. *Introduction to the geometry of foliations*. Part A. Aspects of Mathematics, 1. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1986.
- [Hom53] T. Homma. An extension of the Jordan Curve Theorem. *Yokohama Math. J.*, 1 :125–129, 1953.
- [Kap40] W. Kaplan. Regular curve-families filling the plane, I. *Duke Math. J.* **7** (1940), 154–185.
- [Kap40] W. Kaplan. Regular curve-families filling the plane, II. *Duke Math. J.* **8** (1941), 11–46.
- [LeC05] P. Le Calvez. Une version feuilletée équivariante du théorème de translation de Brouwer. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **102** (2005), 1–98.
- [LeC06] P. Le Calvez. Notes de cours de l'école d'été, Grenoble, juin 2006.
- [LeR04] F. Le Roux. *Homéomorphismes de surfaces : théorèmes de la fleur de Leau-Fatou et de la variété stable*. Astérisque No. 292 (2004).
- [LeR05] F. Le Roux. Structure des homéomorphismes de Brouwer. *Geom. Topol.* **9** (2005), 1689–1774.
- [LeR∞] F. Le Roux. Un indice qui affine l'indice de Poincaré-Lefschetz pour les homéomorphismes de surfaces. <http://arxiv.org/abs/math.DS/0506042>.
- [Mil90] J. Milnor. *Dynamics in one complex variable, Introductory Lectures*. Annals of Mathematics Studies, **160**. Princeton University Press, 2006 et www.math.sunysb.edu/cgi-bin/preprint.pl?ims90-5.
- [Mor74] M. Morse. Fréchet curve classes. *J. Math. Pures Appl.* (9) **53** (1974), 291–298.
- [Nik74] N. A. Nikishin. Fixed points of diffeomorphisms of two-dimensional spheres preserving an oriented plane. *Funktional Anal. i Prelozen* **8** (1974) 84–85.
- [PD82] J. Palis, W. de Melo. *Geometric theory of dynamical systems. An introduction*. Springer-Verlag, 1982.
- [PS87] S. Pelikan, E. Slaminka. A bound for the fixed point index of area-preserving homeomorphisms of two-manifolds. *Ergodic Theory Dynam. Systems* **7** (1987), 463–479.
- [Sei50] H. Seifert Closed integral curves in 3-space and isotopic two-dimensional deformations. *Proc. Amer. Math. Soc.* **1**, (1950), 287–302.

- [Sim74] C. P. Simon. A bound for the fixed-point index of an area-preserving map with applications to mechanics. *Invent. Math.* **26** (1974), 187–200.
- [Whi33] H. Whitney. Regular families of curves. *Ann. of Math. (2)* **34** (1933), no. 2, 244–270.

Juin 2006

, Université Paris Sud, Laboratoire de mathématiques, Bat. 425, 91405 Orsay Cedex FRANCE
E-mail : `frederic.le-roux@math.u-psud.fr`